

MAT-02600 Diskreetti matematiikka
Tentti 17.10.2013 / Merja Laaksonen



- Ei muistimpanoja, kirjallisuutta, laskinta
- Piirrä pääkonseptiini nimen alle peräkkäin neljä neliötä $a' 2 \times 2$.

--	--	--	--

1. (a) Osoita todeksi tai vastaesimerkillä vääräksi, että jokaista kokonaislukua n kohti

$$\left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor$$

(b) Määritä $\mathcal{Z}(\{x_{k+1} + 4x_{k-2}\})$, kun $x_k = 3^k \cos(k\pi/3)$.

2. Etsi reaaliset käännetsemuunnokset $\mathcal{Z}^{-1}[Y(z)]$, kun

(a) $Y(z) = \frac{5z}{(3z-1)} + 2$

(b) $Y(z) = \frac{15z}{(3z-1)(5z-2)}$

(c) $Y(z) = \frac{4z}{9z^2+1}$

3. (a) Mikä on pienin positiivinen jakojäännös, kun jaetaan luvulla 15 luku

$$14^{2013} + 2013^{15} \cdot 1305 + 3^{145}$$

(b) Etsi kaikki sellaiset kokonaisluvut n , jotka toteuttavat samanaikaisesti seuraavat 3 kongruenssiyhtälöä

$$n \equiv 3 \pmod{7}, \quad n \equiv 6 \pmod{11}, \quad n \equiv 2 \pmod{13}.$$

4. (a) Osoita, että jokaista kokonaislukua m kohti

$$m^{31} \equiv m \pmod{77}.$$

(b) Graafi $G = (V, E)$, missä $V = \{v_1, v_2, \dots, v_8\}$ ja

$$E = \{(v_1, v_6), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_6), (v_2, v_7), (v_3, v_8), (v_4, v_7), (v_5, v_8), (v_7, v_8)\}.$$

- i) Suorita syvyysetsintä graafille G aloittaen pisteestä v_3 . Esitä selkeästi etsintän järjestys ja lopuksi DFS-puu havainnollisesti kuvana.
- ii) Mitä on $d(v_3)$?

MAT-02600 Diskreetti matematiikka
Kaavakoeelma



Taulukko z -muunnoksista.

$$x_k = ka^{k-1}, \quad a \text{ on vakio} \qquad X(z) = \frac{z}{(z-a)^2}, \qquad |z| > |a|$$

$$x_k = \cos(k\omega T), \quad \omega, T \text{ ovat vakioita} \qquad X(z) = \frac{z(z - \cos(\omega T))}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}, \qquad |z| > 1$$

$$x_k = \sin(k\omega T), \quad \omega, T \text{ ovat vakioita} \qquad X(z) = \frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}, \qquad |z| > 1$$

Ominaisuudet:

1. $\mathcal{Z}(\{x_{k-k_0}\}) = \frac{1}{z^{k_0}} \mathcal{Z}(\{x_k\})$

2. $\mathcal{Z}(\{x_{k+k_0}\}) = z^{k_0} X(z) - \sum_{p=0}^{k_0-1} x_p z^{k_0-p}$

3. $\mathcal{Z}(\{a^k x_k\}) = X(z/a)$

4. $\mathcal{Z}(\{k^n x_k\}) = (-z \frac{d}{dz})^n X(z)$

5. $\mathcal{Z}(\{(x * y)_k\}) = \mathcal{Z} \left(\sum_{p=0}^k x_p y_{k-p} \right) = X(z)Y(z)$