SGN-1201 Signaalinkäsittelyn menetelmät,
Tentti 15.5.2013
Heikki Huttunen

- ▷ **Vain tiedekunnan laskinta saa käyttää.**
- ▷ **Tenttikysymyksiä ei tarvitse palauttaa.**
- ▷ **Merkitse vastauspaperin alkuun koska olet suorittanut pakolliset harjoitukset. Jos et ole suorittanut niitä vielä, merkitse sekin.**

---

1. Ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia? Ei perusteluja, pelkkä tosi / epätosi. Oikea vastaus 1p, väärä vastaus -$\frac{1}{2}$p, ei vastausta 0p.

   (a) Signaalin $x(n) * y(n)$ DFT on $X(n) * Y(n)$.

   (b) Suotimen stabiilius tarkistetaan selvittämällä ovatko sen siirtofunktion nollien itseisarvot pienempiä kuin yksi.

   (c) Järjestelmä, jonka impulssivaste on $h(n) = \delta(n+3) + 1.2\delta(n-5) + 0.7\delta(n-6)$ on stabiili.

   (d) Kaksiulotteinen diskreetti Fourier-muunnos voidaan laskea yksiulotteisten diskreettien Fourier-muunnosten avulla.

   (e) Laskostuminen estetään A/D-muunnoksessa asettamalla näytteenottotaajuus vähintään samaksi kuin analogisen signaalin suurin taajuus.

   (f) FIR-suotimen impulssivasteessa on äärettömän paljon nollasta eroavia kertoimia.

2. (a) Laske vektorin $x(n) = (1, -1, 4, 5)^T$ diskreetti Fourier-muunnos. (1p)

   (b) Viidensadan Hertsin taajuudella värähtelevästä sinisignaalista otetaan näytteitä 1,25 millisekunnin välein (eli 0,00125 s välein). Millä taajuudella signaali näyttää värähtelevän näytteistyksen jälkeen (eli mille taajuudelle kyseinen taajuus laskostuu)? (2p)

   (c) Tarkastellaan reaalista vektoria $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)^T$. Laske sen diskreetti Fourier-muunnos, kun vektorin $(x_0, x_2, x_4, x_6)^T$ DFT on $(-5, 3, -9, 3)^T$ ja vektorin $(x_1, x_3, x_5, x_7)^T$ DFT on $(0, -12, -4, -12)^T$. (3p)

3. Oletetaan, että kausaalisen LTI-järjestelmän heräte $x(n)$ ja vaste $y(n)$ toteuttavat seuraavan differenssiyhtälön:

$$y(n) = -y(n-1) - \frac{1}{2}y(n-2) + x(n) - 2x(n-1) + x(n-2).$$

   (a) Määritä järjestelmän siirtofunktio $H(z)$.

   (b) Piirrä napa-nollakuvio.

   (c) Onko järjestelmä stabiili? Miksi / miksi ei?

4. Suunnittele ikkunamenetelmällä alipäästösuodin (selvitä käsin impulssivasteen lauseke), jonka vaatimukset ovat seuraavat:

Estokaista	[12 kHz, 16 kHz]
Päästökaista	[0 kHz, 10 kHz]
Päästökaistan maksimivärähtely	0.06 dB
Estokaistan minimivaimennus	34 dB
Näytteenottotaajuus	32 kHz

Käytä oheisia taulukoita hyväksesi.

5. (a) Tarkastellaan alla olevan kuvan mukaista kolmesta lohkosta koostuvaa järjestelmää. Lohkojen siirtofunktiot ovat

$$
\begin{aligned}
H_1(z) &= 1 + 3z^{-2} \\
H_2(z) &= \frac{1}{2} - 2z^{-1} \\
H_3(z) &= \frac{1}{2} + z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}.
\end{aligned}
$$

Mikä on kokonaisuuden ($x(n) \to y(n)$) siirtofunktio?

(b) Tarkastellaan alla olevan kuvan mukaista järjestelmää. Järjestelmä koostuu kahdesta suotimesta. Suotimen $H_1(z)$ impulssivaste on

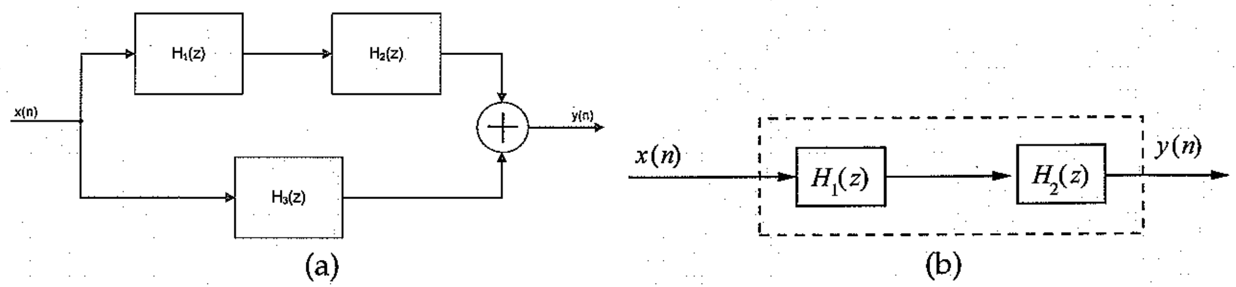
$$h_1(n) = \delta(n-1),$$

ja suotimen $H_2(z)$ taajuusvaste on

$$H_2(e^{i\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{kun } 0 \le \omega < \frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{kun } \frac{\pi}{4} \le \omega \le \pi. \end{cases}$$

Mikä on katkoviivan sisällä olevan kokonaisuuden

i. impulssivaste, (2p)
ii. taajuusvaste? (2p)



Kuva 1: Tehtävien 5a ja 5b järjestelmät.

TAULUKOITA

Suodintyyppi	Impulssivaste kun $n \neq 0$	Impulssivaste kun $n = 0$
Alipäästö	$2f_c \mathrm{sinc}(n \cdot 2\pi f_c)$	$2f_c$
Ylipäästö	$-2f_c \mathrm{sinc}(n \cdot 2\pi f_c)$	$1 - 2f_c$
Kaistanpäästö	$2f_2 \mathrm{sinc}(n \cdot 2\pi f_2) - 2f_1 \mathrm{sinc}(n \cdot 2\pi f_1)$	$2(f_2 - f_1)$
Kaistanesto	$2f_1 \mathrm{sinc}(n \cdot 2\pi f_1) - 2f_2 \mathrm{sinc}(n \cdot 2\pi f_2)$	$1 - 2(f_2 - f_1)$

Ikkuna-funktion nimi	Siirtymäkaistan leveys (normalisoitu)	Päästökaistan värähtely (dB)	Estokaistan minimi-vaimennus (dB)	Ikkunan lauseke $w(n)$, kun $\lvert n \rvert \leq (N-1)/2$
Suorakulmainen	0.9/N	0.7416	21	1
Bartlett	3.05/N	0.4752	25	$1 - \frac{2\lvert n \rvert}{N-1}$
Hanning	3.1/N	0.0546	44	$0.5 + 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Hamming	3.3/N	0.0194	53	$0.54 + 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Blackman	5.5/N	0.0017	74	$0.42 + 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right)$

TABLE 4.5 Properties of the Fourier Transform for Discrete-Time Signals

Property	Time Domain	Frequency Domain
Notation	$x(n)$	$X(\omega)$
	$x_1(n)$	$X_1(\omega)$
	$x_2(n)$	$X_2(\omega)$
Linearity	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$
Time shifting	$x(n-k)$	$e^{-j\omega k}X(\omega)$
Time reversal	$x(-n)$	$X(-\omega)$
Convolution	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
Correlation	$r_{x_1x_2}(l) = x_1(l) * x_2(-l)$	$S_{x_1x_2}(\omega) = X_1(\omega)X_2(-\omega)$ $= X_1(\omega)X_2^*(\omega)$ [if $x_2(n)$ is real]
Wiener–Khintchine theorem	$r_{xx}(l)$	$S_{xx}(\omega)$
Frequency shifting	$e^{j\omega_0 n}x(n)$	$X(\omega - \omega_0)$
Modulation	$x(n)\cos\omega_0 n$	$\frac{1}{2}X(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega - \omega_0)$
Multiplication	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)X_2(\omega - \lambda)d\lambda$
Differentiation in the frequency domain	$nx(n)$	$j\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Conjugation	$x^*(n)$	$X^*(-\omega)$
Parseval's theorem	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega$	

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$