

Tentti(1) MAT-21161 Algoritmimatematiikka
21.5. 2013 Kaarakka

Vastaa jokaiseen kysymykseen ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta.

Kaavaliite on tehtäväpaperin toisella puolella.

Ratkaise tehtävät 1 ja 2 omalle paperilleen ja tehtävät 3 ja 4 omalle paperilleen ja anna ne tarkastajalle, joka laittaa ne eri pinoihin. Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi, opiskelijanumerosi ja myös koulutusohjelmasi. Lisäksi jätä etusivulle ja marginaaleihin tilaa tarkastajan merkintöjä varten.

1. (a) (3 pistettä) Näytä joukko-opin laskusääntöjä käyttäen, että

$$\overline{(A \cup B)} \cup \overline{(A \cap B)} = B.$$

- (b) (3 pistettä) Tarkastellaan relaatiota $R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z} : aRb$ joss $a + b$ on parillinen. Osoita, että R joko on tai ei ole ekvivalenssirelaatio.

2. Osoita määritelmän nojalla, että $2n^3 - 4n^2 + 4n = \Theta(n^3)$.

3. Osoita tautologioita ja päättelysääntöjä käyttäen (ilman totuustaulua), että

$$(A \wedge (B \rightarrow C) \wedge ((A \wedge B) \rightarrow (\neg C \vee D)) \wedge B) \rightarrow D$$

on pätevä teoria.

4. (a) (2 pistettä) Olkoon $f : A \rightarrow B$ funktio. Esitä kvanttoreiden avulla funktion f

- * injektio määritelmä ja
- * surjektio määritelmä.

- (b) (4 pistettä) Osoita tautologioita ja päättelysääntöjä käyttäen (ilman totuustaulua), että

$$(\exists x, (p(x) \rightarrow q(x)) \wedge \forall x, \neg q(x)) \rightarrow \exists x, \neg p(x)$$

on pätevä teoria.

KAAVOJA ON PAPERIN TOISELLA PUOLELLA.

Loogisia ekvivalensseja eli tautologioita

Negaatio	Disjunktio	Konjunktio	Implikaatio	Ekvivalenssi
$\neg\neg p = p$	$p \vee t = t$ $p \vee e = p$ $p \vee p = p$ $p \vee \neg p = t$	$p \wedge t = p$ $p \wedge e = e$ $p \wedge p = p$ $p \wedge \neg p = e$	$p \rightarrow t = t$ $p \rightarrow e = \neg p$ $t \rightarrow p = p$ $e \rightarrow p = t$ $p \rightarrow p = t$ $p \rightarrow q = \neg p \vee q$ $p \rightarrow q = \neg q \rightarrow \neg p$	$p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Vaihdantalait	Liitälait	Osittelulait
$p \wedge q = q \wedge p$ $p \vee q = q \vee p$	$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

De Morganin lait	Absorptio
$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$	$p \wedge (p \vee q) = p$ $p \vee (p \wedge q) = p$ $p \wedge (\neg p \vee q) = p \wedge q$ $p \vee (\neg p \wedge q) = p \vee q$

Inferenssisääntöjä

MP $\frac{A, A \rightarrow B}{\therefore B}$	MT $\frac{A \rightarrow B, \neg B}{\therefore \neg A}$	Conj $\frac{A, B}{\therefore A \wedge B}$	Simp $\frac{A \wedge B}{\therefore A}$
Add $\frac{A}{\therefore A \vee B}$	DS $\frac{A \vee B, \neg B}{\therefore A}$	HS $\frac{A \rightarrow B, B \rightarrow C}{\therefore A \rightarrow C}$	

muista rajoitukset

UI $\frac{\forall x W(x)}{\therefore W(t)}$	UG $\frac{W(t)}{\therefore \forall x W(x)}$	EG $\frac{W(t)}{\therefore \exists x W(x)}$	EI $\frac{\exists x W(x)}{\therefore W(t)}$
---	---	---	---

Ekvivalensseja

$\neg \forall x W(x) = \exists x \neg W(x)$ $\exists x (A(x) \vee B(x)) = \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ $\exists x (A(x) \rightarrow B(x)) = \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$ $\exists x \exists y W(x, y) = \exists y \exists x W(x, y)$	$\neg \exists x W(x) = \forall x \neg W(x)$ $\forall x (A(x) \wedge B(x)) = \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$ $\forall x \forall y W(x, y) = \forall y \forall x W(x, y)$
--	---

$\forall x (C \vee A(x)) = C \vee \forall x A(x)$ $\exists x (C \vee A(x)) = C \vee \exists x A(x)$ $\forall x (C \rightarrow A(x)) = C \rightarrow \forall x A(x)$ $\forall x (A(x) \rightarrow C) = \exists x A(x) \rightarrow C$	$\forall x (C \wedge A(x)) = C \wedge \forall x A(x)$ $\exists x (C \wedge A(x)) = C \wedge \exists x A(x)$ $\exists x (C \rightarrow A(x)) = C \rightarrow \exists x A(x)$ $\exists x (A(x) \rightarrow C) = \forall x A(x) \rightarrow C$
--	--

Implikaatioita

$\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x)$ $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$ $\exists y \forall x W(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y W(x, y)$	$\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ $\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$
---	--