MAT-20601 Diskreetti matematiikka

Tentti (26.8.2013) László Major

Kirjoita kaikkiin papereihin nimesi, opiskelijanumerosi. Voit kirjoittaa samalle sivulle useitakin tehtäviä, näin säästämme luontoa. Laskin on sallittu.

1) a) Kuinka monta positiivista kokonaislukuratkaisua on yhtälöllä

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

b) Entä ei-negatiivista kokonaislukuratkaisua?

2) a) Keksi jokin sopiva rekursio sille jonolle, jonka emäfunktio on

$$F = \frac{1+x}{1-3x+2x^2}$$

Laske jonon ensimmäiset viisi termiä.

b) Olkoon $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ sellainen lukujono, jonka emäfunktio on $\frac{1-x}{1+x}$. Mikä on termin b_{111} arvo?

3) Permutaation π esityksestä puuttuu viisi lukua

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ & & 8 & & & 2 & 5 & \end{pmatrix}$$

a) Kuinka monella eri tavalla voidaan kirjoittaa puuttuvat luvut yllä olevaan esitykseen?

b) Montako inversiota on permutaatiolla π vähintään? Entä enintään?

c) Kuinka monella eri tavalla voidaan kirjoittaa puuttuvat luvut yllä olevaan esitykseen siten, että π olisi syklinen permutaatio?

4) a) Osoita induktiolla, että Fibonaccin jonon termeille pätee, että

$$F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

b) Osoita induktiolla, että $2^{4n} - 5^n$ on jaollinen 11:llä ($n \in \mathbb{N}$).

Tentin kaavaliite

MAT-20601 Diskreetti matematiikka

(26.08.2013)

Emäfunktio: Lukujonon $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ *emäfunktioksi* (generoiva funktio) sanotaan seuraavaa potenssisarjaa

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Permutaatio: Olkoon M jokin äärellinen joukko, sellainen, että $|M| = m$. Bijektiota joukosta M itseensä sanotaan joukon M *permutaatioiksi*. Eli funktio $\pi : M \to M$ on permutaatio, jos $\pi(n_1) \neq \pi(n_2)$ $(n_1, n_2 \in M)$ seuraa siitä, että $n_1 \neq n_2$. Toisin sanoen permutaatiolla tarkoitetaan joukon alkioiden jotakin järjestystä. Joukon M kaikkien permutaatioiden lukumäärä on $m!$.

Permutaation inversio: Yleensä oletetaan joukosta M, että sillä on jokin perusjärjestys. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan nyt, että $M = [m] = \{1, 2, \ldots, m\}$, jolloin alkioilla on luonollisesti suuruusjärjestys, jota voidaan tulkita perusjärjestyksenä. Näillä oletuksilla joukon M jotakin permutaatiota π voidaan määrittää jonolla $a_1, \ldots, a_m$, missä $a_i = \pi(i)$. Esimerkiksi joukon $[4]$ jokin permutaatio on $\pi(1) = 4, \pi(2) = 2, \pi(3) = 1, \pi(4) = 3$, jota merkitään yksinkertaisesti merkinnällä $\pi = 4, 2, 1, 3$. Olkoon taas σ joukon $[m]$ jokin permutaatio. Paria (i, j) $(i, j \in [m])$ sanotaan permutaation σ *inversioksi*, jos $i < j$, mutta $\sigma_i > \sigma_j$.

Syklinen permutaatio: I en cyklisk permutation ligger elementen alltid i samma ordning, men har förskjutits cykliskt så att permutationen får ett nytt första element. Toisin sanoen, permutaatio π on syklinen, jos perusjoukon $[m]$ alkioita voidaan järjestää sellaiseen jonoon $a_1, \ldots, a_m$, että $\pi(a_m) = a_1$ ja $\pi(a_i) = a_{i+1}$, jos $1 \leq i < m$. Esimerkiksi permutaatio $\sigma = 3, 1, 4, 2$ on syklinen.

Fibonaccin jono: Määritellään *Fibonaccin jonoa* rekursiivisesti seuraavalla tavalla: $F_1 = F_2 = 1$ ja $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, jos $n > 2$.

Muita käytännöllisiä kaavoja:

$$24 < 120; \quad F = ma;$$