

MAT-20601 Diskreetti matematiikka

Harjoitustentti (20.8.2013)

Kirjoita kaikkiin papereihin nimesi, opiskelijanumerosi. Voit kirjoittaa samalle sivulle useitakin tehtäviä, näin säästämme luontoa. Laskin on sallittu.

1) Kerrostaloa remontoidaan. Jokaisen kerrostasanteen seinät maalataan tummanruskeaksi tai vaaleanruskeaksi tai valkoiseksi siten, että valkoisella ei maalata kahta kerrostasannetta peräkkäin. Maalattavia kerrostasanteita on yhteensä 5 kpl. Monellako eri tavalla voidaan valita kerrostalon kerrostasanteiden seinien värit?

2) Mikä on seuraavalla matriisilla annetun kahden pelaajan nollasummapelin arvo?

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

3) a) Mikä on seuraavan rekursiolla annetun jonon emäfunktio? Olkoot $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ ja $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ jos $n > 1$.

b) Olkoon $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ sellainen lukujono, jonka emäfunktio on

$$F = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Mikä on termin b_{99} arvo?

4) a) Osoita induktiolla, että Fibonaccin jonon termeille pätee, että

$$F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

b) Osoita induktiolla, että puun pisteiden asteiden keskiarvo on aina pienempi kuin 2.