

MAT-20501 Todennäköisyyslaskenta

Tentti (24.6.2013) (Major László)

Kirjoita kaikkiin papereihin nimesi, opiskelijanumerosi. Voit kirjoittaa samalle sivulle useitakin tehtäviä, näin säästämme luontoa. Laskin on sallittu. Tentissä saa käyttää apuna opintomonistetta Todennäköisyyslaskenta (Perttula, Vattulainen, Suurhasko). Muuta materiaalia ei sallita käytettävän.

1) a) Kolme avioparia lähtee soutelemaan. He vuokraavat kolme samanlaista kahden hengen venettä. Sattumavaraisesti he istuvat veneisiin (samassa veneessä istuvat voivat olla joko samaa sukupuolta tai eri sukupuolta). Millä todennäköisyydellä jokainen istuu oman avioparinsa kanssa samassa veneessä?

b) Veneilyn jälkeen porukka lähtee lavatansseihin. He muodostavat tanssiparit (kaikki haluavat tanssia, mutta samaa sukupuolta edustavat eivät muodosta tanssiparia keskenään). Millä todennäköisyydellä jokainen tanssii oman avioparinsa kanssa?

2) Laatikossa on 5 valkoista ja 4 punaista palloa. Satunnaisesti nostetaan 5 palloa laatikosta. Olkoon X nostettujen punaisten pallojen lukumäärä. Muodosta X :n jakauma. Laske X :n odotusarvo. Millä todennäköisyydellä nostettujen pallojen joukossa on enemmän punaisia palloja kuin valkoisia?

3) Olkoon $\Omega_{X,Y} = \{0, 1, 2\}^2$ diskreetin satunnaisvektorin (X, Y) arvojoukko. Satunnaisvektorin (X, Y) tiheysfunktio $f(x, y)$ ja sen komponenttien marginaalijakaumien tiheysfunktiot $f_1(x)$ ja $f_2(y)$ annetaan alla olevalla taulukolla. Taulukosta puuttuu joitakin arvoja (11 kysymysmerkkiä). Täytä taulukko olettaen, että komponentit X ja Y ovat riippumattomia. Laske $E(XY)$.

		x			$f_2(y)$
		0	1	2	\downarrow
y	0	?	1/9	?	?
	1	?	?	1/12	1/2
	2	?	?	?	?
$f_1(x)$	\rightarrow	1/6	?	?	

4) Olkoon satunnaisvektorin (X, Y) tiheysfunktio

$$f(x, y) = x, \text{ kun } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

Laske ehdollinen todennäköisyys $P(X + Y \leq 1 | Y \leq X)$. Ovatko muuttujat X ja Y riippumattomia?