TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
Matematiikan laitos

MAT-10431 Insinöörimatematiikka A 3U, Tentti 4.3.2013

Tentaattori: Simo Ali-Löytty

Ohjeet: Ei laskimia eikä muistiinpanoja. Kaavakokoelma "Insinöörimatematiikka 3u" on paperin kääntöpuolella.
Kirjoita pääkonseptiin nimen alle neljä 2×2-ruudun kokoista neliötä:

Jokainen tehtävä tehdään omalle sivulle / omille sivuille.
Kirjoita vastauksien <u>perustelut</u> ja <u>välivaiheet</u> näkyviin!

1. Laske epäoleellinen integraali
$$\int_2^\infty \frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
tai osoita, että kyseinen integraali hajaantuu.

2. Selvitä potenssisarjan
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(x+5)^k}{k}$$
suppenemisväli. Selvitä myös suppeneeko potenssisarja suppenemisvälin päätepisteissä.

3. **(a)** (maks. 5 pistettä) Ratkaise alkuarvotehtävä:
$$y''-2y'=\sin(4x),\quad y(0)=1,\quad y'(0)=-\frac{1}{5}.$$
(b) (maks. 1 piste) Laske
$$y''-2y',$$
missä y on **(a)** -kohdassa laskemasi funktio.

4. Ratkaise joko **(a)**-kohta tai **(b)**-kohta, mutta vain toinen.
(a) Olkoon $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\0&3&3\end{bmatrix}$. Ratkaise alkuarvotehtävä $\mathbf{x}'=\mathrm{A}\mathbf{x}$, $\quad \mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix}0\\1\\-3\end{bmatrix}=\mathbf{b}$.
Vihje: tarkista onko vektori $\mathbf{b}$ matriisin A ominaisvektori.
(b) Seuraava Maclaurinin sarja oletetaan tunnetuksi (suppenemisväli on koko $\mathbb{R}$):
$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k}}{k!}$$
Arvioi integraalia $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ kahden desimaalin tarkkuudella.

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

Insinöörimatematiikka 3u
Tentin kaavaliite (periodi 3/2012–2013)

1. Integrointikaavoja

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{ar\,sinh} x + C = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{ar\,cosh} x + C = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert + C$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{ar\,tanh} x + C = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1} + C$

2. $\displaystyle\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

3. $\displaystyle s = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx, \quad A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx,$

$$V = \pi\int_a^b f(x)^2\,dx$$

4. $\displaystyle f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$

5. Maclaurinin sarjoja:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

6. $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 = 0$:
$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$

(1) yksinkertainen reaalijuuri λ: ratkaisu $e^{\lambda x}$

(2) yksinkertainen imaginaarijuuripari $\lambda = \alpha \pm \beta i$: ratkaisut
$e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ ja $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$

(3) k-kertainen reaalijuuri λ: ratkaisut
$e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$, $x^2e^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}$

(4) k-kertainen imaginaarijuuripari $\lambda = \alpha \pm \beta i$: ratkaisut
$e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, $xe^{\alpha x}\sin(\beta x), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$
$e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $xe^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$

7. $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}:\ \mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c},\ X(t) = [\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}\ \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} \cdots \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}]$

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$: ratkaisut $\operatorname{Re}\left(\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}\right)$, $\operatorname{Im}\left(\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}\right)$