

**MAT-13530 Laaja matematiikka 3u / SILVENNÖINEN**  
Tentti 04.03.2013

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!  
Kaavakokoelma jaetaan!

1. Laske oikeiset integraalit:

a)  $\int_0^1 x \ln(x+3) dx$ ,

b)  $\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} dx$ .

2. a) Tutki suppeneeko integraali

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^3} dx$$

ja myönteisessä tapauksessa laske sen arvo.

b) Ratkaise funktiota  $y(x)$  koskeva alkuarvotehtävä

$$(x^2 + 1)y' = xy, \quad y(0) = 3.$$

3. a) Hae differentiaaliyhtälön

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

yleinen ratkaisu.

b) Hae ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon  $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

4. a) Tutki, suppeneeko sarja  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{10^k}{k!}$ .

b) Tutki, onko sarja  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k k^2}{k^3 + 1}$  suppeneva, itseisesti suppeneva, ehdollisesti suppeneva vai hajaantuva.

5. a) Määritä kaikki pisteet  $x \in \mathbb{R}$ , joissa potenssisarja  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} 2^k}{k^3} x^k$  suppenee.

b) Muodosta funktion  $f(x) = x^2 e^{-x^2}$  Taylorin sarja  $x$ :n potensseina (6 ensimmäistä termiä riittää).

c) "Seuraavassa on lyhyt Matlab scriptti ja sen tuloste. Kerro yksityiskohtaisesti, mitä scriptti tekee, ja tämän jälkeen selitä, miksi tuloste on sellainen kuin se on.

Scriptti:

$$f = @(x) \sin(x) + \sin(2*x);$$

$$S = \text{quad}(f, -8*pi, 8*pi)$$

Tuloste:

S =

6.6613e-16".

(Tehtävät 5b ja 5c ovat vaihtoehot, eli ratkaise niistä toinen. Voit ratkaista myös molemmat, jolloin parempi suorituksesi otetaan huomioon.)



**Kaavakokoelma**

Integraalikaavoja on jätetty integroimisvaikeiksi merkisemättä.

1.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$
2.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$
3.  $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$
4.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$
5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{ar\,sinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
6.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{ar\,cosh} x = \ln|x + \sqrt{x^2-1}|$
7.  $\int \sinh x dx = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
8.  $\int \cosh x dx = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
9.  $\int R(\cos x, \sin x) dx$       $\tan \frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$
10.  $\int_1^{\infty} 1/x^p dx < \infty \Leftrightarrow p > 1$

11.  $\int_0^1 1/x^p dx < \infty \Leftrightarrow p < 1$
12.  $x(t) = e^{at} x_0 + \int_0^t e^{a(t-s)} b(s) ds$ .
13.  $a \cos \omega t + b \sin \omega t = A \sin(\omega t + \phi), \quad A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \phi = \frac{b}{A}, \quad \sin \phi = \frac{a}{A}$
14.  $f_k \xrightarrow{\text{osc}} f \Leftrightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} |f(x) - f_k(x)| = 0$
15.  $R = \frac{1}{L}, \quad L = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}, \quad L = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$
16.  $(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!} x^2 + \dots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!} x^k, \quad -1 < x < 1$
17.  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \quad -1 < x \leq 1$
18.  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
19.  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$