



**MAT-20601 Diskreetti matematiikka**  
Tentti 7.1.2013/ Merja Laaksonen

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta

1. (a) Määritä seuraavat arvot

$$\int_1^7 3tH(t-5) dt, \quad \int_1^7 17 \cos(t\pi/3)\delta(t-3) dt, \quad \int_1^7 te^{-t^2} H(t-3)\delta(t) dt.$$

(b) Etsi z-muunnos jonolle  $\left\{3k + \frac{4}{5^k} - 6\delta_{k-7}\right\}$ .

2. Olkoon  $x_k = \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)$ . Ratkaise käyttäen z-muunnosta seuraava differenssiyhtälö

$$y_k - 2y_{k-1} - 3y_{k-2} = x_k - x_{k-1} + x_{k-2}.$$

3. (a) Osoita, että jokaista luonnollista lukua  $n$  kohti

$$8 \mid (7^{2n+1} + 17^n).$$

- (b) Etsi kaikki sellaiset kokonaisluvut  $n$ , jotka toteuttavat samanaikaisesti seuraavat 3 kongruenssiyhtälöä

$$n \equiv 4 \pmod{9}, \quad n \equiv 3 \pmod{7}, \quad n \equiv 2 \pmod{11}.$$

4. (a) Olkoon alkuluku  $p \equiv 1 \pmod{4}$  ja  $b = ((p-1)/2)!$ . Osoita, että

$$b^2 \equiv -1 \pmod{p}.$$

- (b) Kerro lyhyesti mitä tarkoitetaan käsitteillä vierekkäiset pisteet, pisteen aste ja yhtenäinen graafi.



**MAT-20601 Diskreetti matematiikka**  
Kaavakokoelma

Taulukko z-muunnoksista.

$$x_k = ka^{k-1}, \quad a \text{ on vakio} \quad X(z) = \frac{z}{(z-a)^2}, \quad |z| > |a|$$

$$x_k = \cos(k\omega T), \quad \omega, T \text{ ovat vakioita} \quad X(z) = \frac{z(z - \cos(\omega T))}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}, \quad |z| > 1$$

$$x_k = \sin(k\omega T), \quad \omega, T \text{ ovat vakioita} \quad X(z) = \frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}, \quad |z| > 1$$

Ominaisuudet:

$$1. \mathcal{Z}(\{x_{k-k_0}\}) = \frac{1}{z^{k_0}} \mathcal{Z}(\{x_k\})$$

$$2. \mathcal{Z}(\{x_{k+k_0}\}) = z^{k_0} X(z) - \sum_{p=0}^{k_0-1} x_p z^{k_0-p}$$

$$3. \mathcal{Z}(\{a^k x_k\}) = X(z/a)$$

$$4. \mathcal{Z}(\{k^n x_k\}) = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^n X(z)$$

$$5. \mathcal{Z}(\{(x * y)_k\}) = \mathcal{Z}\left(\left\{\sum_{p=0}^k x_p y_{k-p}\right\}\right) = X(z)Y(z)$$