MAT-13520 Laaja matematiikka 2u
Tentti 10.12.2012
Tentaattori: Heikki Orelma
EI LASKIMIA, EI MUISTIINPANOJA

PIIRRÄ PÄÄKONSEPTIIN NIMEN ALLE VIISI NELIÖTÄ (à 2 × 2-ruutua):

OHJE: Kirjoita tentin alkuun miten haluat tenttisi arvosteltavan (kirjoita (a),(b) tai (c) näkyviin tenttipaperin alkuun):

(a) Jos haluat kurssiarvosanasi pelkän tentin perusteella, tee tehtävät 1-5.

(b) Jos puolestasi haluat, että harjoitussuorituksesi ja harkkatyösi otetaan huomioon arvostelussa, tee tehtävät 1-4. Arvosanarajat ovat samat kuin kohdassa (a).

(c) Sekä (a) että (b), jolloin tee tehtävät 1-5. Laskemme tällöin kaksi arvosanaa, joista parempi jää voimaan.

1. Tarkastellaan yhtälöparia

$$\begin{cases} x+2y &= -1 \\ 2x+4y &= \lambda, \end{cases}$$

missä $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Kirjoita yhtälöryhmä matriisimuodossa $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$.

(b) Tutki determinantin avulla käänteismatriisin A^{-1} olemassaoloa.

(c) Millä parametrin λ arvolla yhtälöparilla ei ole ratkaisuja?

2. Olkoon A neliömatriisi.

(a) Määrittele A:n ominaisarvot, ominaisvektorit ja karakteristinen polynomi.

(b) Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

missä $a \in \mathbb{R}$. Millä a:n arvoilla x on A:n ominaisvektori? Mikä on tällöin tätä vastaava ominaisarvo?

3. Etsi matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

sarake- ja nolla-avaruudelle kanta, kun

$$\mathrm{rref}([A|0]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mitkä ovat sarake- ja nolla-avaruuksien dimensiot? Tarkista, että matriisien dimensiolause toteutuu.

4. Määritellään $\mathbb{R}^2$:n osajoukko

$$S = \{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\}.$$

(a) Osoita aliavaruuden määritelmään perustuen, että S on $\mathbb{R}^2$:n aliavaruus.

(b) Etsi vektori y siten, että

$$S = \mathrm{span}\{\mathrm{y}\}.$$

(c) Määrää aliavaruudelle (jokin) kanta.

5. Olkoot nyt $S_1, \ldots, S_k$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruuksia. Jos jokainen $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ voidaan esittää yksikäsitteisesti summana

$$\mathrm{x} = \mathrm{x}_1 + \cdots + \mathrm{x}_k$$

siten, että $\mathrm{x}_j \in S_j$, sanotaan että **aliavaruuksien** $S_1, \ldots, S_k$ **suora summa** on $\mathbb{R}^n$ ja merkitään

$$\mathbb{R}^n = S_1 \oplus \cdots \oplus S_k.$$

Olkoot nyt $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_4$ avaruuden $\mathbb{R}^4$ luonnollisen kannan vektorit. Osoita, että

$$\mathbb{R}^4 = \mathrm{span}\{\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_2\} \oplus \mathrm{span}\{\mathrm{e}_3\} \oplus \mathrm{span}\{\mathrm{e}_4\}.$$

Jos $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^4$, niin miltä näyttää (määritelmässä esitetty) jako

$$\mathrm{x} = \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3?$$