MAT-21161 Algoritmimatematiikka / Hirvonen
Tentti 18.10.2012
Ei laskimia tai kirjallista materiaalia. Kaavakokoelma kääntöpuolella.

Huom. Missään tehtävässä pelkkä lopputuloksen ilmoittaminen ei riitä, vaan vastauspaperin tulee sisältää päättely, jolla lopputulokseen päädyit.

1. Olkoon $A = \{a, b, c\}$. Relaation R matriisi on $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Esitä relaatio R alkioittain. Selitä, mitkä seuraavista ominaisuuksista relaatiolla R on: refleksiivisyys, symmetrisyys, transitiivisuus. Perustele kunkin ominaisuuden olemassaolo tai -olemattomuus.

   (b) Muodosta relaation R symmetrinen sulkeuma $s(R)$ ja todista, että $s(R)$ on ekvivalenssirelaatio. Esitä ekvivalenssiluokka $[a]$.

2.

   (a) Muodosta tehtävän 1 joukon A potenssijoukko.

   (b) Todista, että kahden parittoman luvun tulo on pariton.

   (c) Todista väite todeksi tai epätodeksi: Kaikille $a, b \in \mathbb{N}$

$$(a + b) \bmod 3 = a \bmod 3 + b \bmod 3.$$

3. Mitkä ovat seuraavan teorian premissit ja mikä on sen johtopäätös? Todista teoria loogisen päättelyn keinoin ILMAN totuustaulua.

$$((A \vee B) \to (C \wedge D)) \to (B \to D).$$

4.

   (a) Olkoon $A = \{a, b, c, d\}$ ja $B = \langle b, d, c, a\rangle$. Joukko C määritellään niin, että $B \in C$ ja jos $x \in C \cup \mathrm{Lists}[A]$, niin $\mathrm{head}(x) \in C$ ja $\mathrm{tail}(x) \in C$. Joukkoon C ei kuulu muita alkioita. Kirjoita joukko C alkioittain. Mikä on tässä tapauksessa mahtavuus $|C|$?

   (b) Olkoon $f(n) = 8n^3 + 15n^2 - 3n - 2$, kun $n \in \mathbb{N}$. Todista, että $f(n) = \Omega(n^3)$.

Loogisia ekvivalensseja eli tautologioita

Negaatio	Disjunktio	Konjunktio	Implikaatio
$\neg\neg p = p$	$p \vee \mathbf{t} = \mathbf{t}$	$p \wedge \mathbf{t} = p$	$p \to \mathbf{t} = \mathbf{t}$
	$p \vee \mathbf{e} = p$	$p \wedge \mathbf{e} = \mathbf{e}$	$p \to \mathbf{e} = \neg p$
	$p \vee p = p$	$p \wedge p = p$	$\mathbf{t} \to p = p$
	$p \vee \neg p = \mathbf{t}$	$p \wedge \neg p = \mathbf{e}$	$\mathbf{e} \to p = \mathbf{t}$
			$p \to p = \mathbf{t}$
			$p \to q = \neg p \vee q$
			$p \to q = \neg q \to \neg p$
			$\neg(p \to q) = p \wedge \neg q$

Vaihdantalait	Liitäntälait	Osittelulait
$p \wedge q = q \wedge p$	$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee q = q \vee p$	$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

De Morganin lait	Absorptio
$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$	$p \wedge (p \vee q) = p$
$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$	$p \vee (p \wedge q) = p$
	$p \wedge (\neg p \vee q) = p \wedge q$
	$p \vee (\neg p \wedge q) = p \vee q$

Inferenssisääntöjä

MP $\dfrac{A,\ A \to B}{\therefore B}$	**MT** $\dfrac{A \to B,\ \neg B}{\therefore \neg A}$	**Conj** $\dfrac{A,\ B}{\therefore A \wedge B}$	**Simp** $\dfrac{A \wedge B}{\therefore A}$
Add $\dfrac{A}{\therefore A \vee B}$	**DS** $\dfrac{A \vee B,\ \neg B}{\therefore A}$	**HS** $\dfrac{A \to B,\ B \to C}{\therefore A \to C}$	

muista rajoitukset

UI $\dfrac{\forall x\, W(x)}{\therefore W(t)}$	**UG** $\dfrac{W(t)}{\therefore \forall x\, W(x)}$	**EG** $\dfrac{W(t)}{\therefore \exists x\, W(x)}$	**EI** $\dfrac{\exists x\, W(x)}{\therefore W(t)}$

Ekvivalensseja

$\neg\forall x\, W(x) = \exists x\, \neg W(x)$	$\neg\exists x\, W(x) = \forall x\, \neg W(x)$
$\exists x\, (A(x) \vee B(x)) = \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$	$\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) = \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$
$\exists x\, (A(x) \to B(x)) = \forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)$	$\forall x\, \forall y\, W(x,y) = \forall y\, \forall x\, W(x,y)$
$\exists x\, \exists y\, W(x,y) = \exists y\, \exists x\, W(x,y)$	

$\forall x\, (C \vee A(x)) = C \vee \forall x\, A(x)$	$\forall x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \forall x\, A(x)$
$\exists x\, (C \vee A(x)) = C \vee \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (C \to A(x)) = C \to \forall x\, A(x)$	$\exists x\, (C \to A(x)) = C \to \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (A(x) \to C) = \exists x\, A(x) \to C$	$\exists x\, (A(x) \to C) = \forall x\, A(x) \to C$

Implikaatioita

$\forall x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$
$\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \vee B(x))$	$\forall x\, (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \to \forall x\, B(x)$
$\exists y\, \forall x\, W(x,y) \Rightarrow \forall x\, \exists y\, W(x,y)$	