TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
Matematiikan laitos

MAT-13510 Laaja matematiikka 1U, Tentti 15.10.2012

Tentaattori: Simo Ali-Löytty

Ohjeet: Ei laskimia, eikä muistiinpanoja. Kaavakokoelma "Insinöörimatematiikka 1u"on paperin kääntöpuolella.
Kirjoita pääkonseptiin neljä 2×2-ruudun kokoista neliötä:

Jokainen tehtävä tehdään omalle sivulle / omille sivuille.
Kirjoita vastauksien perustelut ja välivaiheet näkyviin!

1. Ratkaise kaikki kompleksiluvut $z \in \mathbb{C}$, jotka toteuttavat yhtälön $z^4 + 4 = 0$. Anna vastaukset muodossa $z = x + iy$, missä $x, y \in \mathbb{R}$ ovat sievennetyssä muodossa.

2. **(a)** Osoita, että kaikille luonnollisille luvuille $n \in \mathbb{N}$ pätee
$$\sum_{i=1}^{n} 4i = 2n(n+1).$$
(b) Osoita, että $-1 \cdot x = -x$ kaikilla kunnan alkioilla x. Käytä vain kunta-aksioomia ja tietoa, että $0 \cdot x = 0$ kaikilla kunnan alkioilla x.

3. Osoita raja-arvon määritelmää käyttäen, että $\lim_{x\to 1}(x^2 + 3x - 2) = 2$. Toisin sanoen todista kyseinen raja-arvo $\varepsilon - \delta$-todistuksella.

4. Olkoon $f(x) = e^{|\sin(x)|}$ reaalifunktio.
(a) Mikä on reaalifunktion f laajin mahdollinen määrittelyjoukko. (max. 2 pistettä)
(b) Laske derivaatan avulla funktion f kriittiset pisteet. (max. 4 pistettä)

Kunta-aksioomat:

Joukko $\mathbb{R}$ varustettuna yhteenlaskulla $+$ ja kertolaskulla $\cdot$ on kunta, jos se toteuttaa seuraavat aksioomat. Olkoon seuraavassa $x, y, z \in \mathbb{R}$.

K1: $x + y = y + x$ (yhteenlaskun vaihdantalaki)

K2: $x + (y + z) = (x + y) + z$ (yhteenlaskun liitäntälaki)

K3: On olemassa $0 \in \mathbb{R}$ s.e. $x + 0 = x$ (yhteenlaskun neutraalialkion olemassaolo)

K4: Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ on olemassa *vastaluku* $y \in \mathbb{R}$ s.e. $x + y = 0$, merkitään $y = -x$.

K5: $x \cdot y = y \cdot x$ (kertolaskun vaihdantalaki)

K6: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (kertolaskun liitäntälaki)

K7: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (osittelulaki)

K8: On olemassa $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, s.e. $1 \cdot x = x$ (kertolaskun neutraalialkion olemassaolo)

K9: Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $x \neq 0$ on olemassa *käänteisluku* $y \in \mathbb{R}$ s.e. $x \cdot y = 1$, merkitään $y = \frac{1}{x}$ tai $y = x^{-1}$.

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

Insinöörimatematiikka 1u
Tentin kaavaliite (periodi 1/2012–2013)

1. Derivointikaavoja

$f(x)$	$f'(x)$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$
$\operatorname{ar}\sinh x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{ar}\cosh x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{ar}\tanh x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$

2. $D_y f^{-1}(y) = \dfrac{1}{f'(x)} \qquad (y = f(x))$

3. $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

4. $\operatorname{ar}\sinh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad \operatorname{ar}\cosh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right),$

$$\operatorname{ar}\tanh x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

5. $\sin(\theta + \phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$
$\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$

6. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$