**MAT-10440 Insinöörimatematiikka X 4u / Hirvonen**
**Tentti 27.08.2012**
Ei laskimia, taulukkokirjoja tai muuta kirjallisuutta. Kaavakokoelma kääntöpuolella.

1. Tarkastellaan funktiota $f(x, y) = x^3 + x^2y - y^2 - 4y$.
   (a) Etsi kaikki kriittiset pisteet $(x, y)$ funktiolle $f$.
   (b) Laske funktion $f$ Hessen matriisi jokaisessa kriittisessä pisteessä.
2. Tarkastellaan funktiota $f(x, y, z) = xze^{y^2+z^2-5}$. (Varmuudeksi: eksponentti on $y^2 + z^2 - 5$.)
   (a) Laske funktion $f$ gradientti pisteessä $(3, -2, 1)$.
   (b) Määritä pisteessä $(3, -2, 1)$ funktion $f$ muutosnopeus suuntaan $(-3, 0, 4)$.
3. Etsi funktion $f(x, y, z) = 3x + 4y + 5z$ pienin ja suurin arvo ympyrällä $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
   Vihje: Lagrange.
4. Kappaletta rajoittavat koordinaattitasot ja taso $3x + 2y + 6z = 6$.
   (a) Esitä kappaleen tilavuuden integraali kahdessa eri integroimisjärjestyksessä siten, että sisimmän integraalin integrointimuuttuja EI ole sama molemmissa järjestyksissä.
   (b) Laske kappaleen tilavuuden integraali kummassa tahansa kohdan (a) järjestyksessä.

**Insinöörimatematiikka X 4u**
**Kaavamoniste**

$$(F \circ G)'(\mathbf{a}) = F'(G(\mathbf{a}))\,G'(\mathbf{a})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_k}$$

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

$$\nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

$$\begin{cases} g(x,y) = 0 \\ D_x f = \lambda D_x g \\ D_y f = \lambda D_y g \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x,y,z) = 0 \\ D_x f = \lambda D_x g \\ D_y f = \lambda D_y g \\ D_z f = \lambda D_z g \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \\ D_x f = \lambda D_x g + \mu D_x h \\ D_y f = \lambda D_y g + \mu D_y h \\ D_z f = \lambda D_z g + \mu D_z h \end{cases}$$

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T Hf(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})$$

$$Hf(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} D_1D_1f(\mathbf{x}) & D_1D_2f(\mathbf{x}) & \cdots & D_1D_nf(\mathbf{x}) \\ D_2D_1f(\mathbf{x}) & D_2D_2f(\mathbf{x}) & \cdots & D_2D_nf(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_nD_1f(\mathbf{x}) & D_nD_2f(\mathbf{x}) & \cdots & D_nD_nf(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}, \quad |J_F(\mathbf{x})| = \rho^2 \sin\phi$$

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2} \qquad \cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$$