

MAT-20601 Diskreetti matematiikka

Tentti (18.6.2012)

Kirjoita kaikkiin papereihin nimesi, opiskelijanumerosi. Voit kirjoittaa samalle sivulle useitakin tehtäviä, näin säästämme luontoa.

1) a) Bussissa on 10 istumapaikkaa. Kuinka monella eri tavalla 7 ihmistä voi istua tässä bussissa (kukaan ei istu jonkun toisen syliin)?

b) Kuinka monella eri tavalla 7 ihmistä voidaan jakaa kolmeen ryhmään siten, että jokaisessa ryhmässä on ainakin 2 ihmistä.

2) a) Olkoon $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sellainen lukujono, jonka emäfunktio on

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n) = (1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3) \cdots$$

Määritä luvut a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 ja a_5 .

b) Olkoon $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ sellainen lukujono, jonka emäfunktio on $\frac{1+x}{1-x}$. Mikä on termin b_{99} arvo?

3) a) Montako inversiota on permutaatiolla $\pi = 2, 5, 3, 4, 1$?

b) Osoita, että joukon $[n]$ kaikkien syklisten permutaatioiden lukumäärä on $(n-1)!$.

4) a) Osoita induktiolla, että Fibonaccin jonon termeille pätee, että

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

b) Osoita induktiolla, että $2^{4n} - 5^n$ on jaollinen 11:llä ($n \in \mathbb{N}$).

Tentin kaavaliite

MAT-20601 Diskreetti matematiikka

(18.06.2012)

Emäfunktio: Lukujonon $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$ emäfunktioiksi (generoiva funktio) sanotaan seuraavaa potenssisarjaa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Permutaatio: Olkoon M jokin äärellinen joukko, sellainen, että $|M| = m$. Bijektioita joukosta M itseensä sanotaan joukon M permutaatioiksi. Eli funktio $\pi : M \rightarrow M$ on permutaatio, jos $\pi(n_1) \neq \pi(n_2)$ ($n_1, n_2 \in M$) seuraa siitä, että $n_1 \neq n_2$. Toisin sanoen permutaatiolla tarkoitetaan joukon alkioiden jotakin järjestystä. Joukon M kaikkien permutaatioiden lukumäärä on $m!$.

Permutaation inversio: Yleensä oletetaan joukosta M , että sillä on jokin perusjärjestys. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan nyt, että $M = [m] = \{1, 2, \dots, m\}$, jolloin alkiolla on luonnollisesti suuruusjärjestys, jota voidaan tulkita perusjärjestyksenä. Näillä oletuksilla joukon M jotakin permutaatiota π voidaan määrittää jonolla a_1, \dots, a_m , missä $a_i = \pi(i)$. Esimerkiksi joukon $[4]$ jokin permutaatio on $\pi(1) = 4, \pi(2) = 2, \pi(3) = 1, \pi(4) = 3$, jota merkitään yksinkertaisesti merkinnällä $\pi = 4, 2, 1, 3$. Olkoon taas σ joukon $[m]$ jokin permutaatio. Paria (i, j) ($i, j \in [m]$) sanotaan permutaation σ inversioksi, jos $i < j$, mutta $\sigma_i > \sigma_j$.

Syklinen permutaatio: I en cyklisk permutation ligger elementen alltid i samma ordning, men har förskjutits cykliskt så att permutationen får ett nytt första element. Toisin sanoen, permutaatio π on syklinen, jos perusjoukon $[m]$ alkiota voidaan järjestää sellaiseen jonoon a_1, \dots, a_m , että $\pi(a_m) = a_1$ ja $\pi(a_i) = a_{i+1}$, jos $1 \leq i < m$. Esimerkiksi permutaatio $\sigma = 3, 1, 4, 2$ on syklinen.

Bussi: Bussi on henkilöautoa isompi kulkuneuvo, jota käytetään kuljettamaan useita ihmisiä paikasta toiseen. Oletetaan, että bussissa on tiettyjä istumapaikkoja.

Fibonacciin jono: Määritellään *Fibonacciin jonoa* rekursiivisesti seuraavalla tavalla: $F_1 = F_2 = 1$ ja $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, jos $n > 2$.

Muita käytännöllisiä kaavoja:

$$2 \cdot 2 = 4; \quad E = mc^2;$$