Tentti(1) MAT-21161 Algoritmimatematiikka

22.5.2012 Kaarakka

Vastaa jokaiseen kysymykseen ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta.

Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi, opiskelijanumerosi ja myös koulutusohjelmasi.

1. Tarkastellaan joukkoja A, B ja C. Osoita, että

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

2. (a) (3 pistettä) Olkoon $R = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,c\rangle\}$ relaatio joukossa $\{a,b,c\}$. Muodosta relaation R refleksiivinen sulkeuma $r(R)$, symmetrinen sulkeuma $s(R)$ ja transitiivinen sulkeuma $t(R)$.

   (b) (3 pistettä) Tarkastellaan relaatiota $R : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$: aRb joss $a \leq b$. Osoita, että R joko on tai ei ole ekvivalenssirelaatio.

3. Osoita tautologioita ja päättelysääntöjä käyttäen (ilman totuustaulua), että

$$((A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (B \to D)) \to (\neg C \to D)$$

   on pätevä teoria.

4. (a) (3 pistettä) Seuraava todistus, jossa pyritään näyttämään teoria

$$\neg\,(\exists x\,(p(x) \wedge q(x))) \wedge \exists x\,(p(x) \to q(x)) \to \exists x\,\neg q(x)$$

   päteväksi, on virheellinen. Etsi kaikki kohdat, missä todistus menee pieleen ja perustele, miksi näin tapahtuu?

1. $\neg\,(\exists x\,(p(x) \wedge q(x)))$	P
2. $\exists x\,(p(x) \to q(x))$	P
3. $\forall x\,\neg(p(x) \wedge q(x))$	1., T
4. $\neg(p(t) \wedge q(t))$	3., EI
5. $p(t) \to q(t)$	2., EI
6. $\neg p(t) \wedge \neg q(t)$	4., T, De Morgan
7. $\neg p(t)$	6., Simp.
8. $\neg q(t)$	5., 7., MT
9. $\exists x\,\neg q(x)$	8., EG
M.O.T	1., 2., 9., CP

   (b) (3 pistettä) Olkoot a ja b reaalilukuja, joille $a < b$. Näytä, että $|(a,b)| = |(0,1)|$ löytämällä bijektio näiden reaalilukuvälien välille. Lisäksi osoita, että löytämäsi bijektio on todellakin bijektio, osoittamalla, että se on sekä injektio että surjektio.

KAAVOJA ON PAPERIN TOISELLA PUOLELLA.

Loogisia ekvivalensseja eli tautologioita

Negaatio	Disjunktio	Konjunktio	Implikaatio	Ekvivalenssi
$\neg\neg p = p$	$p \vee \mathbf{t} = \mathbf{t}$	$p \wedge \mathbf{t} = p$	$p \to \mathbf{t} = \mathbf{t}$	$p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$
	$p \vee \mathbf{e} = p$	$p \wedge \mathbf{e} = \mathbf{e}$	$p \to \mathbf{e} = \neg p$	
	$p \vee p = p$	$p \wedge p = p$	$\mathbf{t} \to p = p$	
	$p \vee \neg p = \mathbf{t}$	$p \wedge \neg p = \mathbf{e}$	$\mathbf{e} \to p = \mathbf{t}$	
			$p \to p = \mathbf{t}$	
			$p \to q = \neg p \vee q$	
			$p \to q = \neg q \to \neg p$	

Vaihdantalait	Liitäntälait	Osittelulait
$p \wedge q = q \wedge p$	$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee q = q \vee p$	$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

De Morganin lait	Absorptio
$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$	$p \wedge (p \vee q) = p$
$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$	$p \vee (p \wedge q) = p$
	$p \wedge (\neg p \vee q) = p \wedge q$
	$p \vee (\neg p \wedge q) = p \vee q$

Inferenssisääntöjä

MP	**MT**	**Conj**	**Simp**
$\dfrac{A,\ A \to B}{\therefore B}$	$\dfrac{A \to B,\ \neg B}{\therefore \neg A}$	$\dfrac{A,\ B}{\therefore A \wedge B}$	$\dfrac{A \wedge B}{\therefore A}$
Add	**DS**	**HS**	
$\dfrac{A}{\therefore A \vee B}$	$\dfrac{A \vee B,\ \neg B}{\therefore A}$	$\dfrac{A \to B,\ B \to C}{\therefore A \to C}$	

muista rajoitukset

UI	**UG**	**EG**	**EI**
$\dfrac{\forall x\, W(x)}{\therefore W(t)}$	$\dfrac{W(t)}{\therefore \forall x\, W(x)}$	$\dfrac{W(t)}{\therefore \exists x\, W(x)}$	$\dfrac{\exists x\, W(x)}{\therefore W(t)}$

Ekvivalensseja

$\neg\forall x\, W(x) = \exists x\, \neg W(x)$	$\neg\exists x\, W(x) = \forall x\, \neg W(x)$
$\exists x\, (A(x) \vee B(x)) = \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$	$\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) = \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$
$\exists x\, (A(x) \to B(x)) = \forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)$	$\forall x\, \forall y\, W(x,y) = \forall y\, \forall x\, W(x,y)$
$\exists x\, \exists y\, W(x,y) = \exists y\, \exists x\, W(x,y)$	

$\forall x\, (C \vee A(x)) = C \vee \forall x\, A(x)$	$\forall x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \forall x\, A(x)$
$\exists x\, (C \vee A(x)) = C \vee \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (C \to A(x)) = C \to \forall x\, A(x)$	$\exists x\, (C \to A(x)) = C \to \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (A(x) \to C) = \exists x\, A(x) \to C$	$\exists x\, (A(x) \to C) = \forall x\, A(x) \to C$

Implikaatioita

$\forall x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$
$\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \vee B(x))$	$\forall x\, (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \to \forall x\, B(x)$
$\exists y\, \forall x\, W(x,y) \Rightarrow \forall x\, \exists y\, W(x,y)$	