

**MAT-10442 Insinöörimatematiikka B 4u**  
**Tentti 14.5.2012**

Ei laskinta eikä taulukkokirjoja. Kaavaliite ohessa.

Ratkaise tehtävät 1 ja 2 omalle konseptiarkilleen ja tehtävät 3 ja 4 omalle konseptiarkilleen. Palauta arkit eri pinoihin. Muista kirjoittaa nimesi ja opiskelijanumerosi jokaiseen arkkiin.

1. a) Laske raja-arvo tai osoita, että sitä ei ole olemassa:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + 2y^2}$$

b) Laske funktion  $f(x, y) = xe^{-2y}$  kaikki toisen kertaluvun osittaisderivaatat.

2. Riippukoon suure  $T$  suureista  $x$  ja  $y$  seuraavasti:

$$T = x(e^y + e^{-y}).$$

$x$ :n ja  $y$ :n arvoiksi mitataan:  $x = 2$  ja  $y = \ln 2$ . Mittauksen virheiksi arvioidaan:  $x$ :n virhe  $\leq 0,1$  ja  $y$ :n virhe  $\leq 0,02$ . Arvioi mittaustulosten perusteella lasketun  $T$ :n arvon virhettä käyttäen lineaarista approksimaatiota.

3. Laske

$$\iint_R xy \, dA,$$

kun  $R \subset \mathbb{R}^2$  on se rajoitettu joukko, jota rajaavat käyrät  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 6 - x$  ja  $y = 0$ .

4. Tarkastellaan integraalia

$$\iiint_T yz \, dV,$$

missä  $T$ :tä rajaa sylinteri  $x^2 + y^2 = 4$ , alhaalta taso  $z = 0$  ja ylhäältä taso  $z = y$ , eli  $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq y\}$ . Huomaa erityisesti, että  $y \geq 0$  joukossa  $T$ . Kirjoita integraali sisäkkäisinä integraaleina

- a) muuttujien  $x$ ,  $y$  ja  $z$  avulla,  
b) sylinterikoordinaatteja käyttäen.  
c) Laske integraali joko a- tai b-kohdassa kirjoittamallasi tavalla.  
Ohje, josta saattaa laskutavasta riippuen olla apua:

$$\sin^3 t = \sin t \sin^2 t = \sin t(1 - \cos^2 t).$$



---

**MAT-10442 Insinöörimatematiikka B 4u**  
**Tentin kaavaliite (periodi 4/2011–2012)**

---

1.  $f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$

2. 
$$\begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) \end{cases}$$

3. 
$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} \quad dx dy dz = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

4.  $m = \iiint_T \delta dV, \quad \bar{x} = \frac{1}{m} \iiint_T x \delta dV, \quad I_z = \iiint_T (x^2 + y^2) \delta dV$

5.  $\sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2}, \quad \cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$

6.  $(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = 0$