

MAT-10411 Insinöörimatematiikka A1u

Tentti 18.10.2010

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja eikä laskinta!

1. Sievennä joukko-opin laskusääntöjä käyttäen lauseke

$$\overline{(A \cup B) \cup (B \cap C) \cap (\overline{A} \cup C)}$$

muotoon $X * Y * Z$, jossa $*$ on yhdiste tai leikkaus ja X, Y, Z ovat joukkoja A, B, C tai niiden komplementteja.

2. Tarkastele funktiota $y = f(x) = e^{-2x} + 2e^{-x}$, $|x| \leq 1$.

- Osoita, että funktiolla on käänteisfunktio, muodostamatta itse käänteisfunktiota.
- Mitkä ovat käänteisfunktion määrittelyjoukko ja arvojoukko?
- Laske käänteisfunktion derivaatta kohdassa 3 eli $Df^{-1}(3)$ muodostamatta itse käänteisfunktiota.

3. a) Esitä kompleksiluku $z = -\sqrt{3} - j$ kompleksilukujen polaarisisessä eksponentiaalimuodossa ($z = re^{j\theta}$), missä $-\pi < \theta \leq \pi$. Piirrä z kompleksitasoon. Saitko siis vaihekulman oikein?

b) Mikä on pienin positiivinen kokonaisluku n , jolle z^n on puhtaasti reaalinen?

4. Tiedetään, että $\cosh x = 2$. Laske $\sinh x$. (Tuloksena on kaksi arvoa!)

Kaavakokoelma kääntöpuolella!

KAAVOJA

1. $Df^{-1}(x) = \frac{1}{Df(y)}$, missä $x = f(y)$

2. $D \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$

3. $D \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4. $D \tan(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

5. $D a^x = a^x \ln a$

6. $D \log_a(x) = \frac{1}{x \ln a}$

7. $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

8. $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

9. $\tanh(x) = \sinh(x)/\cosh(x)$

10. $\operatorname{ar} \sinh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

11. $\operatorname{ar} \cosh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

12. $\operatorname{ar} \tanh(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

13. $D \operatorname{ar} \sinh(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

14. $D \operatorname{ar} \cosh(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

15. $D \operatorname{ar} \tanh(x) = \frac{1}{1-x^2}$ ($-1 < x < 1$)