

MAT-20601 Diskreetti matematiikka

Tentti 17.1.2011

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta

- Kirjoita konsepteihin DiMa, nimesi ja numerosi

- Piirrä pääkonseptiin nimen alle neljä neliötä vierekkäin $a' 2 \times 2$.

--	--	--	--

1. (a) Määritä seuraavat arvot

$$\int_{-4}^4 \left\lceil \frac{t+1}{3} \right\rceil H(t-3) dt, \quad \int_{-4}^4 \left(\frac{7 - \text{signum}(t)}{4} \right) \delta(t+3) dt.$$

(b) Etsi z-muunnos jonolle $\left\{ \frac{3}{4^k} - 3 \right\}$.

(c) Jonon $\{x_k\} = \{1/2^k\}$ konvoluutio jonon $\{h_k\}$ kanssa tuottaa vastejonon $\{y_k\}$, jonka ensimmäiset termit ovat $\{3, 2, 1, 0\}$. Laske jonon $\{h_k\}$ alkupään termit tarkasti, niin pitkälle kuin annettujen tietojen perusteella voidaan laskea.

2. Olkoon $x_k = \sin\left(k\frac{\pi}{3}\right)$. Ratkaise käyttäen z-muunnosta seuraava differenssiyhtälö

$$y_k - \frac{1}{2}y_{k-1} = x_k - x_{k-1} + x_{k-2}.$$

3. (a) Etsi kaikki ratkaisut kokonaislukuyhtälölle

$$59x + 18y = 3.$$

(b) Osoita, että jokaista luonnollista lukua n kohti

$$6 \mid (8^{2n+1} + 40^{2n})$$

4. (a) Laske

$$1^p + 2^p + 3^p + \dots + p^p \pmod{p}, \quad p \in \mathbb{P}.$$

(b) Graafi $G = (V, E)$, missä $V = \{v_1, v_2, \dots, v_8\}$ ja

$$E = \{(v_1, v_6), (v_2, v_1), (v_6, v_2), (v_2, v_7), (v_2, v_8), (v_3, v_1), (v_5, v_3), (v_4, v_5), (v_6, v_5)\}.$$

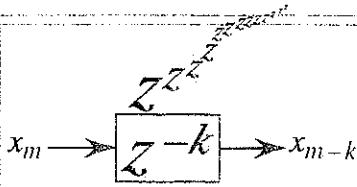
i) Mitä on $d(v_2)$?

ii) Suorita syvyyssetsintä graafille G aloittaen pisteestä v_2 . Esitä selkeästi etsinnän järjestys ja lopuksi DFS-puu havainnollisesti kuvana.

Käännä!

MAT-20601 Diskreetti matematiikka

Kaavakokoelma



Taulukko z-muunnoksista.

$$x_k = ka^{k-1}, a \text{ on vakio}$$

$$X(z) = \frac{z}{(z-a)^2}, \quad |z| > |a|$$

$$x_k = \cos(k\omega T), \omega, T \text{ ovat vakioita}$$

$$X(z) = \frac{z(z - \cos(\omega T))}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}, \quad |z| > 1$$

$$x_k = \sin(k\omega T), \omega, T \text{ ovat vakioita}$$

$$X(z) = \frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}, \quad |z| > 1$$

Ominaisuudet:

$$1. \mathcal{Z}(\{x_{k-k_0}\}) = \frac{1}{z^{k_0}} \mathcal{Z}(\{x_k\})$$

$$2. \mathcal{Z}(\{x_{k+k_0}\}) = z^{k_0} X(z) - \sum_{p=0}^{k_0-1} x_p z^{k_0-p}$$

$$3. \mathcal{Z}(\{a^k x_k\}) = X(z/a)$$

$$4. \mathcal{Z}(\{k^n x_k\}) = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^n X(z)$$

$$5. \mathcal{Z}(\{(x * y)_k\}) = \mathcal{Z}\left(\left\{\sum_{p=0}^k x_p y_{k-p}\right\}\right) = X(z)Y(z)$$