

# MAT-10411 Insinöörimatematiikka A1u

Tentti 17.10.2011

**Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja eikä laskinta!**

1. Laske seuraavat raja-arvot:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2}$ , b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{1+x^2} - x)$ , c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$

2. a) Derivoi yhdistetty funktio  $g(x) = f(x + f(x))$ .

b) Derivoi edellisen kohdan erikoistapaus, jossa  $f(x) = \sqrt{x}$ .

c) Laske b-kohdan funktion  $g(x)$  käänteisfunktion derivaatta kohdassa  $\sqrt{2}$  eli  $Dg^{-1}(\sqrt{2})$  muodostamatta itse käänteisfunktiota.

3. Leikkaavatko käyrät  $y = \sinh(x)$  ja  $y = 2 - \cosh(x)$  toisensa? Jos leikkaavat, niin mitkä ovat leikkauspisteen koordinaatit esitetynä mahdollisimman sievennetyssä muodossa?

4. a) Etsi kompleksiluku  $z = x + iy$ , jonka reaali-osa  $x$  ja imaginaari-osa  $y$  toteuttavat yhtälön

$$\frac{2 + x - iy}{3x + iy} = 1 + i2.$$

b) Esitä kompleksiluku  $z = \frac{1}{4} - i\frac{3}{4}$  sekä sen käänteisluku  $z^{-1}$  summamuodossa  $a+ib$  ja laske sitten kummankin itseisarvot. Kumpi on suurempi?  
(Vertailu onnistuu ilman laskinta.)

**Kaavakokoelma kääntöpuolella!**



---

**Insinöörimatematiikka 1u**  
**Tentin kaavaliite (periodi 1/2011–2012)**

---

## 1. Derivointikaavoja

$f(x)$	$f'(x)$
$a^x$	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\operatorname{ar sinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{ar cosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{ar tanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

2.  $D_y f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad (y = f(x))$

3.  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$

4.  $\operatorname{ar sinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \operatorname{ar cosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),$

$$\operatorname{ar tanh} x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$$