**Algoritmimatematiikka**
**Tentti 17.10.2011**
Ei laskinta tai kirjallista materiaalia. Tautologia- ja inferenssikokoelma kääntöpuolella.

Perustele kaikki vastauksesi!

1. (a) Todista, että $x$ on pariton jos ja vain jos $x^2$ on pariton. (4p)
   (b) Funktio cons liittää alkion jonoon. Mitä on $f(2)$ (näytä myös kaikki välivaiheet)? (2p)

$$f(n) = \begin{cases} \langle 0 \rangle, & \text{kun } n = 0 \\ \operatorname{cons}(n, f(n-1)) & \text{kun } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

2. Olkoon $A = \{1, 2, 5, 6\}$. Määritellään relaatio $S \subseteq A \times A$ seuraavasti:

$$aSb \Leftrightarrow a \bmod 3 = b \bmod 4.$$

   (a) Esitä alkioittain sulkeumat $r(S)$, $s(S)$ ja $t(S)$ (refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen).
   (b) Onko jokin sulkeumajoukoista $r(S)$, $s(S)$ tai $t(S)$ osittainen järjestys? Perustele miksi on tai ei ole. Jos on, esitä Hassen diagrammi.

3. Olkoon $C = \{1, 2, 3\}$. Tarkastellaan funktiota $F : \text{Lists}[C] \to \mathcal{P}(C)$ (missä $\mathcal{P}(C)$ on joukon $C$ potenssijoukko), joka on määritelty kaavalla

$$F(\langle x_1, x_2, \ldots x_n \rangle) = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}.$$

   (a) Mitkä ovat (mahdollisimman sievennetyssä muodossa) alkion $\langle 1, 2, 1, 1, 2 \rangle \in \text{Lists}[C]$ kuva ja alkion $\emptyset \in \mathcal{P}(C)$ alkukuva funktiossa $F$?
   (b) Onko $F$ injektio? Todista tai näytä vastaesimerkki.
   (c) Onko $F$ surjektio? Todista tai näytä vastaesimerkki.
   (d) Onko tehtävän 2 relaatio $S$ funktio? Selitä miksi on tai miksi ei ole.

4. Mitkä ovat seuraavan teorian premissit ja johtopäätös? Todista teoria inferenssitodistuksella.

$$((A \vee B) \to (C \wedge D)) \to (B \to D).$$

Loogisia ekvivalensseja eli tautologioita

| Negaatio | Disjunktio | Konjunktio | Implikaatio |
|---|---|---|---|
| $\neg\neg p = p$ | $p \vee \mathbf{t} = \mathbf{t}$ | $p \wedge \mathbf{t} = p$ | $p \to \mathbf{t} = \mathbf{t}$ |
| | $p \vee \mathbf{e} = p$ | $p \wedge \mathbf{e} = \mathbf{e}$ | $p \to \mathbf{e} = \neg p$ |
| | $p \vee p = p$ | $p \wedge p = p$ | $\mathbf{t} \to p = p$ |
| | $p \vee \neg p = \mathbf{t}$ | $p \wedge \neg p = \mathbf{e}$ | $\mathbf{e} \to p = \mathbf{t}$ |
| | | | $p \to p = \mathbf{t}$ |
| | | | $p \to q = \neg p \vee q$ |
| | | | $p \to q = \neg q \to \neg p$ |
| | | | $\neg(p \to q) = p \wedge \neg q$ |

| Vaihdantalait | Liitäntälait | Osittelulait |
|---|---|---|
| $p \wedge q = q \wedge p$ | $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$ | $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ |
| $p \vee q = q \vee p$ | $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$ | $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ |

| De Morganin lait | Absorptio |
|---|---|
| $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ | $p \wedge (p \vee q) = p$ |
| $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$ | $p \vee (p \wedge q) = p$ |
| | $p \wedge (\neg p \vee q) = p \wedge q$ |
| | $p \vee (\neg p \wedge q) = p \vee q$ |

Inferenssisääntöjä

| | | | |
|---|---|---|---|
| **MP** $\dfrac{A,\ A \to B}{\therefore B}$ | **MT** $\dfrac{A \to B,\ \neg B}{\therefore \neg A}$ | **Conj** $\dfrac{A,\ B}{\therefore A \wedge B}$ | **Simp** $\dfrac{A \wedge B}{\therefore A}$ |
| **Add** $\dfrac{A}{\therefore A \vee B}$ | **DS** $\dfrac{A \vee B,\ \neg B}{\therefore A}$ | **HS** $\dfrac{A \to B,\ B \to C}{\therefore A \to C}$ | |

muista rajoitukset

| | | | |
|---|---|---|---|
| **UI** $\dfrac{\forall x\, W(x)}{\therefore W(t)}$ | **UG** $\dfrac{W(t)}{\therefore \forall x\, W(x)}$ | **EG** $\dfrac{W(t)}{\therefore \exists x\, W(x)}$ | **EI** $\dfrac{\exists x\, W(x)}{\therefore W(t)}$ |

Ekvivalensseja

| | |
|---|---|
| $\neg\forall x\, W(x) = \exists x\, \neg W(x)$ | $\neg\exists x\, W(x) = \forall x\, \neg W(x)$ |
| $\exists x\, (A(x) \vee B(x)) = \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$ | $\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) = \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$ |
| $\exists x\, (A(x) \to B(x)) = \forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)$ | $\forall x\, \forall y\, W(x,y) = \forall y\, \forall x\, W(x,y)$ |
| $\exists x\, \exists y\, W(x,y) = \exists y\, \exists x\, W(x,y)$ | |

| | |
|---|---|
| $\forall x\, (C \vee A(x)) = C \vee \forall x\, A(x)$ | $\forall x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \forall x\, A(x)$ |
| $\exists x\, (C \vee A(x)) = C \vee \exists x\, A(x)$ | $\exists x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \exists x\, A(x)$ |
| $\forall x\, (C \to A(x)) = C \to \forall x\, A(x)$ | $\exists x\, (C \to A(x)) = C \to \exists x\, A(x)$ |
| $\forall x\, (A(x) \to C) = \exists x\, A(x) \to C$ | $\exists x\, (A(x) \to C) = \forall x\, A(x) \to C$ |

Implikaatioita

| | |
|---|---|
| $\forall x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, A(x)$ | $\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$ |
| $\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \vee B(x))$ | $\forall x\, (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \to \forall x\, B(x)$ |
| $\exists y\, \forall x\, W(x,y) \Rightarrow \forall x\, \exists y\, W(x,y)$ | |