

# MAT-20601 Diskreetti matematiikka

## Tentti 5.12.2011

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta
- Kirjoita konsepteihin DiMa, nimesi ja numerosi
- Piirrä pääkonseptiin nimen alle neljä neliötä vierekkäin a'  $2 \times 2$ .

--	--	--	--

1. (a) Määritä seuraavat arvot

$$\int_{-3}^3 2t(H(t) - H(t-4)) dt, \quad \int_{-3}^3 2t(\delta(t) - \delta(t-4)) dt.$$

(b) Etsi z-muunnos jonolle  $\left\{ \frac{5}{3^k} - \frac{3}{5} \delta_{k-1} \right\}$ .

(c) Etsi käänteismuunnos  $\mathcal{Z}^{-1} \left[ \frac{15z}{(3z-1)} \cdot \frac{3}{5z} \right]$  soveltamalla konvoluutio-ominaisuutta.

2. Olkoon  $x_k = \frac{1}{2}$ . Ratkaise käyttäen z-muunnosta seuraava differenssiyhtälö

$$y_k - \frac{1}{2}y_{k-1} = x_k - 2x_{k-1}.$$

3. (a) Olkoon  $n$  luonnollinen luku. Jos murtoluku

$$\frac{18n + 20}{6n + 1}$$

supistuu, niin millä luvulla se supistuu?

- (b) Etsi kaikki sellaiset kokonaisluvut  $n$ , jotka toteuttavat samanaikaisesti seuraavat 3 kongruenssiyhtälöä

$$n \equiv 6 \pmod{12}, \quad n \equiv 2 \pmod{7}, \quad n \equiv 3 \pmod{11}.$$

4. (a) Olkoot  $p$  ja  $p+2$  alkulukukaksoset. Osoita, että

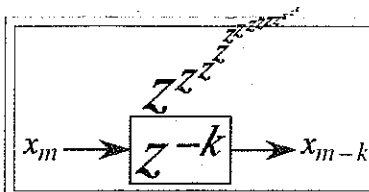
$$4((p-1)! + 1) + p \equiv 0 \pmod{p(p+2)}.$$

- (b) Graafi  $G = (V, E)$ , missä  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_8\}$  ja

$$E = \{(v_1, v_6), (v_1, v_3), (v_1, v_2), (v_2, v_6), (v_3, v_7), (v_2, v_8), (v_4, v_7), (v_5, v_2), (v_7, v_8)\}.$$

i) Suorita syvyyssetsintä graafille  $G$  aloittaen pisteestä  $v_3$ . Esitä selkeästi etsinnän järjestys ja lopuksi DFS-puu havainnollisesti kuvana.

ii) Mitkä viivat ovat siteitä, kun i-kohdan DFS-puu virittää graafin  $G$ ?



# MAT-20601 Diskreetti matematiikka

## Kaavakokoelma

Taulukko z-muunnoksista.

$$x_k = ka^{k-1}, a \text{ on vakio}$$

$$X(z) = \frac{z}{(z-a)^2}, \quad |z| > |a|$$

$$x_k = \cos(k\omega T), \omega, T \text{ ovat vakioita}$$

$$X(z) = \frac{z(z - \cos(\omega T))}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}, \quad |z| > 1$$

$$x_k = \sin(k\omega T), \omega, T \text{ ovat vakioita}$$

$$X(z) = \frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}, \quad |z| > 1$$

Ominaisuudet:

$$1. \mathcal{Z}(\{x_{k-k_0}\}) = \frac{1}{z^{k_0}} \mathcal{Z}(\{x_k\})$$

$$2. \mathcal{Z}(\{x_{k+k_0}\}) = z^{k_0} X(z) - \sum_{p=0}^{k_0-1} x_p z^{k_0-p}$$

$$3. \mathcal{Z}(\{a^k x_k\}) = X(z/a)$$

$$4. \mathcal{Z}(\{k^n x_k\}) = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^n X(z)$$

$$5. \mathcal{Z}(\{(x * y)_k\}) = \mathcal{Z}\left(\left\{\sum_{p=0}^k x_p y_{k-p}\right\}\right) = X(z)Y(z)$$