

MAT-13520 Laaja matematiikka 2u  
Tentti 12.12.2011  
EI LASKIMIA, EI MUISTIINPANOJA

PIIRRÄ PÄÄKONSEPTIIN NIMEN ALLE VIISI NELIÖTÄ (à  
 $2 \times 2$ -ruutua):

--	--	--	--	--

1. Tutki Gauß-Jordanin eliminointimenetelmän avulla millä parametrin  $k \in \mathbb{R}$  arvoilla yhtälöryhmällä

$$x_1 + x_3 = 1$$

$$x_2 + x_3 = k$$

$$x_2 + kx_3 = 1$$

on

- (a) yksikäsitteinen ratkaisu,
  - (b) ei yhtään ratkaisua,
  - (c) äärettömän monta ratkaisua?
2. Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

kun  $a \in \mathbb{R}$ .

- (a) Tutki determinantin avulla millä parametrin  $a$  valinnoilla käänteismatriisi  $A^{-1}$  on olemassa.
  - (b) Etsi edellä olevissa tilanteissa  $A^{-1}$ .
3. Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Etsi matriisin  $A$

- (a) ominaisarvot ja vastaavat ominaisavaruuksien kannat,
  - (b) ominaisarvojen algebralliset ja geometriset kertaluvut,
  - (c) nolla-avaruuden kanta,
  - (d) sarakeavaruuden kanta.
4. Olkoon  $\{v_1, \dots, v_k\}$  ortonormaali joukko vektoreita avaruudessa  $\mathbb{R}^n$ . Osoita, että joukon vektorit ovat lineaarisesti riippumattomat.
5. Oletetaan, että funktio  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  toteuttaa ehdon  $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$  jokaisella  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ja  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Osoita, että joukko

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$$

on aliavaruus.