

1. Tarkastellaan lineaarista yhtälöryhmää

$$\begin{cases} -2x - 4y + 7z = 1, \\ -3x - 8y + 10z = 1, \\ x + 2y - 4z = 1. \end{cases}$$

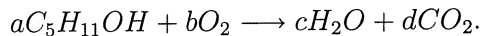
- (a) Kirjoita yhtälöryhmää vastaava lisätty matriisi $[A | b]$.
(b) Muunna $[A | b]$ pelkistettyyn porrasmuotoon. Merkitse käyttämäsi alkeisrivioperaatiot näkyviin.
(c) Ratkaise x, y ja z käyttämällä Gauss-Jordanin eliminaatiota.

2. Tarkastellaan vektoreita

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Ovatko vektorit $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ lineaarisesti riippumattomat? Perustele.
(b) Muodosta kanta aliavaruudelle $\text{row}([\vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_3 \vec{v}_4])$.
(c) Mikä on aliavaruuden $\text{col}([\vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_3 \vec{v}_4])$ dimensio? Voit käyttää tarvittaessa kurssilla todistettuja lauseita apuna.

3. Tarkastellaan kemiallista reaktioyhtälöä



- (a) Muodosta yhtälöryhmä reaktioyhtälön molekyylien kertoimille a, b, c, d .
(b) Ratkaise (a)-kohdan yhtälöryhmä ja määrää pienimmät kokonaislukukertoimet reaktioyhtälölle.

4. Neliömatriisi Q on ortogonaalinen, jos $Q^T Q = I = Q Q^T$.

- (a) Näytä, että jokainen ortogonaalinen matriisi on kääntyvä.
(b) Osoita, että $R = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ on ortogonaalinen. Määrää R^{-1} .
(c) Todista, että ortogonaaliselle matriisille pätee $\|Q\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$. Merkintä $\|\vec{x}\|$ tarkoittaa vektorin $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ pituutta.

5. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Etsi A :n ominaisarvot.
(b) Etsi A :n ominaisvektorit.
(c) Kirjoita A muotoon $A = PDP^{-1}$, missä D on diagonaalinen.