Algoritmimatematiikka

Tentti 18.02.2010

Ei laskinta tai kirjallista materiaalia. Tautologia- ja interferenssikokoelma kääntöpuolella.

Puolita saamasi konseptiarkit neljäksi A4-kokoiseksi paperiksi.
Kirjoita kunkin tehtävän ratkaisu eri paperille.
Eri tehtävien ratkaisupaperit kerätään erillisiin pinoihin.

1. Olkoon $A = \{a, b, c\}$ ja $R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle\}$.

   (a) Mitä seuraavista relaatio R on ja miksi: refleksiivinen, symmetrinen, transitiivinen, ekvivalenssirelaatio?

   (b) Esitä relaation R refleksiivinen sulkeuma $r(R)$, symmetrinen sulkeuma $s(R)$ ja transitiivinen sulkeuma $t(R)$ sekä joukko R^2.

2. Mikä/mitkä ovat teorian $((A \vee B) \to (C \wedge D)) \to (B \to D)$ premissi(t) ja johtopäätös? Todista teoria käyttäen interferenssisääntöjä.

   (Huom. Todistus muulla tavalla tuottaa enintään 3 pistettä.)

3. (a) Tarkastellaan rekursiivisesti esitettyä funktiota

$$f(x, L) = \begin{cases} \langle x\rangle, & \text{jos } L = \langle\rangle \\ \text{cons}(x, L), & \text{jos } x \leq \text{head}(L) \\ \text{cons}(\text{head}(L),\ f(x, \text{tail}(L))) & \text{muuten} \end{cases}$$

   Tässä $\text{cons}(x, L)$ tarkoittaa alkion x lisäämistä ensimmäiseksi listaan L. Esitä yksityiskohtaisesti kaikki rekursion vaiheet läpikäyden, mitä ovat $f(3, \langle 2, 1, 5\rangle)$ ja $f(4, \langle 3\rangle)$

   (b) Todista, että $n^3 - 2n^2 + n - 4 = O(n^3)$, kun $n \in \mathbb{N}$.

4. Tarkastellaan joukkoja

$$A = \{x \in \mathbb{N} : \text{floor}(\log_2 x) = 2\}$$
$$B = \{x \in \text{Lists}[\{a, b, c\}] : \text{jonon } x \text{ pituus on } 1\}$$

   (a) Esitä joukot A ja B luetellen kaikki niiden alkiot.

   (b) Vastaa kysymyksiin perustellen:

      i. Onko funktion $f : A \to B$ mahdollista olla injektio?
      ii. Onko funktion $f : A \to B$ mahdollista olla surjektio?
      iii. Päteekö $\forall x \in A\ \exists y \in \mathbb{N} :\ x = 4 + y \bmod 4$?
      iv. Onko joukon B mahtavuus $|B| = 5$?

(Huom. Jos et osaa kohtaa (a), voit kuitenkin vastata kohtaan (b), kun <u>keksit itse</u> jotkin kaksi joukkoa A_1 ja B_1 siten, että ne ovat epätyhjiä ja lisäehtona tässä tapauksessa on, että B_1:ssä on enemmän alkioita kuin A_1:ssa.)

Loogisia ekvivalensseja eli tautologioita

Negaatio	Disjunktio	Konjunktio	Implikaatio
$\neg\neg p = p$	$p \vee \mathbf{t} = \mathbf{t}$	$p \wedge \mathbf{t} = p$	$p \rightarrow \mathbf{t} = \mathbf{t}$
	$p \vee \mathbf{e} = p$	$p \wedge \mathbf{e} = \mathbf{e}$	$p \rightarrow \mathbf{e} = \neg p$
	$p \vee p = p$	$p \wedge p = p$	$\mathbf{t} \rightarrow p = p$
	$p \vee \neg p = \mathbf{t}$	$p \wedge \neg p = \mathbf{e}$	$\mathbf{e} \rightarrow p = \mathbf{t}$
			$p \rightarrow p = \mathbf{t}$
			$p \rightarrow q = \neg p \vee q$
			$p \rightarrow q = \neg q \rightarrow \neg p$
			$\neg(p \rightarrow q) = p \wedge \neg q$

Vaihdantalait	Liitäntälait	Osittelulait
$p \wedge q = q \wedge p$	$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee q = q \vee p$	$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

De Morganin lait	Absorptio
$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$	$p \wedge (p \vee q) = p$
$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$	$p \vee (p \wedge q) = p$
	$p \wedge (\neg p \vee q) = p \wedge q$
	$p \vee (\neg p \wedge q) = p \vee q$

Inferenssisääntöjä

MP $\dfrac{A,\ A \rightarrow B}{\therefore B}$	**MT** $\dfrac{A \rightarrow B,\ \neg B}{\therefore \neg A}$	**Conj** $\dfrac{A,\ B}{\therefore A \wedge B}$	**Simp** $\dfrac{A \wedge B}{\therefore A}$
Add $\dfrac{A}{\therefore A \vee B}$	**DS** $\dfrac{A \vee B,\ \neg B}{\therefore A}$	**HS** $\dfrac{A \rightarrow B,\ B \rightarrow C}{\therefore A \rightarrow C}$	

muista rajoitukset

UI	UG	EG	EI
$\dfrac{\forall x\, W(x)}{\therefore W(t)}$	$\dfrac{W(t)}{\therefore \forall x\, W(x)}$	$\dfrac{W(t)}{\therefore \exists x\, W(x)}$	$\dfrac{\exists x\, W(x)}{\therefore W(t)}$

Ekvivalensseja

$\neg\forall x\, W(x) = \exists x\, \neg W(x)$	$\neg\exists x\, W(x) = \forall x\, \neg W(x)$
$\exists x\, (A(x) \vee B(x)) = \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$	$\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) = \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$
$\exists x\, (A(x) \rightarrow B(x)) = \forall x\, A(x) \rightarrow \exists x\, B(x)$	$\forall x\, \forall y\, W(x,y) = \forall y\, \forall x\, W(x,y)$
$\exists x\, \exists y\, W(x,y) = \exists y\, \exists x\, W(x,y)$	

$\forall x\, (C \vee A(x)) = C \vee \forall x\, A(x)$	$\forall x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \forall x\, A(x)$
$\exists x\, (C \vee A(x)) = C \vee \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (C \rightarrow A(x)) = C \rightarrow \forall x\, A(x)$	$\exists x\, (C \rightarrow A(x)) = C \rightarrow \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (A(x) \rightarrow C) = \exists x\, A(x) \rightarrow C$	$\exists x\, (A(x) \rightarrow C) = \forall x\, A(x) \rightarrow C$

Implikaatioita

$\forall x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$
$\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \vee B(x))$	$\forall x\, (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \rightarrow \forall x\, B(x)$
$\exists y\, \forall x\, W(x,y) \Rightarrow \forall x\, \exists y\, W(x,y)$	