



Tentissä saa käyttää kirjallista materiaalia oman valinnan mukaan.

1. Tarkastellaan standardimuotoista primaali-duaaliparia

$$\begin{array}{ll} \text{(LP)} & \min \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \text{ehdoilla} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \\ & \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(DP)} & \max \quad \mathbf{b}^T \mathbf{u} \\ & \text{ehdoilla} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{u} \leq \mathbf{c}, \\ & \quad \mathbf{u} \text{ vapaa.} \end{array}$$

Tutki, ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia. Anna lyhyt perustelu tai vastaesimerkki.

- Jos primaalilla on useita optimikantoja, niin ne ovat degeneroituneita.
- Duaalitehtävän optimiarvo on suurempi kuin primaalitehtävän optimiarvo.
- Oletetaan, että $\Omega_{LP} \neq \emptyset$, mutta primaalilla ei ole äärellistä optimia. Rajoitusyhtälön $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ oikea puoli voidaan muuttaa sellaiseksi, että (LP):llä on äärellinen optimi.

2. Kirjoita seuraavan LP-probleeman duaali.

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{ehdoilla} & \mathbf{A}_1 \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_1, \\ & \mathbf{A}_2 \mathbf{x} = \mathbf{b}_2, \\ & \mathbf{A}_3 \mathbf{x} \geq \mathbf{b}_3, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array}$$

missä $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n}$, $i = 1, 2, 3$. Sievennä mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon.

3. Oletetaan, että $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on konvekksi ja jatkuvasti derivoituva. Oletetaan edelleen, että \mathbf{x}^* on probleeman

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$

optimipiste, mutta $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ei ole optimipiste. Osoita, että $\mathbf{d} = \mathbf{x}^* - \mathbf{y}$ on f :n vähenemissuunta pisteessä \mathbf{y} .

4. Tarkastellaan probleemaa

$$(*) \quad \begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{ehdoilla} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \end{array}$$

a. Onko piste $\mathbf{x} = [3, -3]^T$ probleeman KT-piste, kun

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 3)^2, \quad \mathbf{A} = [1 \ 1], \quad \mathbf{b} = 0?$$

b. Olkoon \mathbf{x}^* probleeman (*) KT-piste ja oletetaan, että matriisin \mathbf{A} vaakarivit ovat lineaarisesti riippumattomia. Osoita, että pisteessä \mathbf{x}^* Lagrangen kerroinvektoreita λ on tarkalleen yksi.