MAT-10351 Insinöörimatematiikka A5

Tentti 26.5.2010

- **Vastaa tehtävät 1-2 yhdelle konseptille ja 3-4 toiselle konseptille.**
- **Ei laskimia, ei omaa kirjallista materiaalia.**

---

1. a) Olkoon $k > 0$. Laske integraalin arvo. Mieti integroimisjärjestystä.

$$\int_0^{2k} \int_{x/2}^{k} e^{-y^2} \, dy dx$$

b) Määritä a)-kohdan tuloksen perusteella suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\iint_A e^{-y^2} \, dy dx$$

kun $A = \{(x, y) : x \geq 0, \quad y \geq \frac{x}{2}\}$

2. Laske onton putken

$$S = \{(x, y, z) \mid 5 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \ 1 \leq z \leq 6\}$$

massa, kun putken tiheysfunktio on $\rho(x, y, z) = z(x^2 + y^2)$.

3. Määritä differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu ja alkuehdon toteuttava ratkaisu

$$y' = \frac{y^2}{x^3}, \quad y(1) = \frac{1}{2}$$

4. Määritä differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu.

$$x^{(4)} + 9x'' = 3$$

- **Kääntöpuolella kaavakokoelma**

MAT-10351 Insinöörimatematiikka A5
Kaavakokoelma

1. $$\iint_{R_{xy}} f(x,y)\ dxdy = \iint_{R_{uv}} f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\ dudv$$

2. $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$$

3. $$\begin{cases} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$$

4. $$\begin{cases} x &= \rho\sin(\phi)\cos(\theta) \\ y &= \rho\sin(\phi)\sin(\theta) \\ z &= \rho\cos(\phi) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \rho^2\sin(\phi)$$

5. $$m = \iint_R \rho(x,y)\ da, \quad J = \iint_R d(x,y)^2\rho(x,y)\ da$$
$$x_0 = \frac{1}{m}\iint_R x\rho(x,y)\ da, \quad y_0 = \frac{1}{m}\iint_R y\rho(x,y)\ da$$

6. $$\int f'(g(t))g'(t)\ dt = f(g(t)) + C$$
$$\int u(x)v'(x)\ dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\ dx + C$$
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \ln|f(x)| + C$$

7. $y' + a(x)y = f(x)$
$$y = e^{-A(x)}\left(\int f(x)e^{A(x)}\ dx + C\right), \quad A(x) = \int a(x)\ dx$$

$$\int f' f^n = \frac{f^{n+1}}{n+1}$$

8. $$W(y_1(x),y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

9. $y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$
$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) &= f(x) \end{cases}$$
$$c_1(x) = \int \frac{-y_2(x)f(x)}{W(y_1(x),y_2(x))}dx, \qquad c_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1(x),y_2(x))}dx$$

10. $$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = A\sin(\omega t + \phi)$$
$$A = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos(\phi) = \tfrac{b}{A}, \quad \sin(\phi) = \tfrac{a}{A}, \quad \phi = \arctan\left(\tfrac{a}{b}\right)\ (\pm\pi)$$

11. $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$
- **yksinkertainen reaalijuuri** λ_1: ratkaisu $e^{\lambda_1 x}$
- **yksinkertainen imaginaarijuuripari** $\alpha \pm j\beta$: ratkaisut $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ ja $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$
- **k-kertainen reaalijuuri** λ_1: ratkaisut $e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x},\ x^2e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda_1 x}$
- **k-kertainen imaginaarijuuripari** $\alpha \pm j\beta$: ratkaisut $e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ xe^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $e^{\alpha x}\sin(\beta x),\ xe^{\alpha x}\sin(\beta x), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

12. $$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t); \quad \mathbf{x}(t) = \mathrm{X}(t)\mathbf{c} + \mathbf{x}_p(t)$$
$$\mathrm{X}(t) = \left[\mathbf{v}_1e^{\lambda_1 t},\ \mathbf{v}_2e^{\lambda_2 t}, \ldots,\ \mathbf{v}_ne^{\lambda_n t}\right]$$

13. $$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta, \quad \mathbf{w}_{1,2} = \mathbf{u} \pm j\mathbf{v}, \quad \mathrm{Re}\{\mathbf{w}_1e^{\lambda_1 t}\},\ \mathrm{Im}\{\mathbf{w}_1e^{\lambda_1 t}\}$$
$$e^{jt} = \cos(t) + j\sin(t)$$