

MAT-20600 Diskreetti matematiikka Tentti 10.5.2010



- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta
- Kirjoita konseptiini DiMa, nimesi ja numerosi
- Piirrä pääkonseptiin nimen alle neljää neliötä vierekkäin $a' \times 2 \times 2$.

--	--	--	--

1. (a) Mitä arvoja seuraava lauseke saa

$$(H(x) - H(x-2)) \left(2 \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil - \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor \right) ?$$

Määritä myös tarkasti millä muuttujan x arvoilla kukin arvo saadaan.

(b) Etsi z-muunnos jonolle $\left\{ \binom{2}{3}^k \left(1 - \sin\left(k\frac{\pi}{6}\right) \right) \right\}$.

2. Differenssiyhtälö

$$15y_k - 20y_{k-1} + 5y_{k-2} = x_k + x_{k-1}$$

vastaa erästä systeemiä. Etsi systeemin siirtofunktio $H(z)$ ja määritä sen navat ja nollat. Ratkaise differenssiyhtälö käyttäen z-muunnosta, kun $x_k = \delta_k$.

3. (a) Osoita, että $6 \mid a(a+1)(2a+1)$.

- (b) Ratkaise kongruenssiyhtälö $312x \equiv 9 \pmod{57}$.

4. (a) Osoita, että $2(p-3)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, kun p on pariton alkuluku.

- (b) Suunnattu graafi $G = (V, E)$, missä $V = \{v_1, v_2, \dots, v_8\}$ ja

$$E = \{(v_1, v_6), (v_2, v_1), (v_6, v_2), (v_2, v_7), (v_2, v_8), (v_3, v_1), (v_5, v_3), (v_4, v_5), (v_6, v_5)\}.$$

- i) Onko G :llä juuri? Jos on, niin mikä?

- ii) Suorita syvyysetsintä aloittaen pisteestä v_5 graafin G alusgraafille. Esitä selkeästi etsimän järjestys ja lopuksi DFS-puu havainnollisesti kuvana.

MAT-20600 Diskreetti matematiikka Kaavakokoelma tentissä 2010



Taulukko z-muunnoksista.

$$x_k = ka^{k-1}, a \text{ on vakio} \quad X(z) = \frac{z}{(z-a)^2}, \quad |z| > |a|$$

$$x_k = \cos(k\omega T), \omega, T \text{ ovat vakioita} \quad X(z) = \frac{z(z - \cos(\omega T))}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}, \quad |z| > 1$$

$$x_k = \sin(k\omega T), \omega, T \text{ ovat vakioita} \quad X(z) = \frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}, \quad |z| > 1$$

Ominaisuudet:

1. $\mathcal{Z}(\{x_{k-k_0}\}) = \frac{1}{z^{k_0}} \mathcal{Z}(\{x_k\})$

2. $\mathcal{Z}(\{x_{k+k_0}\}) = z^{k_0} X(z) - \sum_{p=0}^{k_0-1} x_p z^{k_0-p}$

3. $\mathcal{Z}(\{a^k x_k\}) = X(z/a)$

4. $\mathcal{Z}(\{k^n x_k\}) = (-z \frac{d}{dz})^n X(z)$

5. $\mathcal{Z}(\{(x * y)_k\}) = \mathcal{Z}\left(\left\{\sum_{p=0}^k x_p y_{k-p}\right\}\right) = X(z)Y(z)$