

Aihe: 2. kertaluvun lineaariset differentiaaliyhtälöt.

Luentomonisteen kohdat: 5.7-5.10

- Torstain 13.5 ryhmän opiskelijat voivat osallistua johonkin toiseen ryhmään.
- Kurssisivulta löytyy kaavakokoelma, joka on käytössä kurssin tenteissä.
- Tehtävät 7*-10* ovat 3h-laskuharjoitusten paikalla laskettavia tehtäviä.

1. Mikä on differentiaaliyhtälön $xy'' - y' = e^{2x}(4x - 2)$ yleinen ratkaisu, kun eräs yksityisratkaisu on $y = e^{2x}$.

Vihje: Kokeile vastaavan homogeenisen yhtälön ratkaisuksi funktiota $1, x, x^2, x^3$ jne.

2. Määritä DY:n $y'' - 2y = 0$ yleinen ratkaisu ja alkuehdot $y(0) = 0, y'(0) = 1$ toteuttava ratkaisu.

3. Määritä DY:n $y'' + 4y = 0$ yleinen ratkaisu ja alkuehdot $y(0) = 1, y'(0) = 1$ toteuttava ratkaisu.

4. Määritä DY:n $y'' + 2y' + y = 0$ yleinen ratkaisu ja alkuehdot $y(-1) = -1, y'(-1) = 0$ toteuttava ratkaisu.

5. Ratkaise DY:n $y'' + y = -7x^2$ yleinen ratkaisu ja alkuehdot $y(0) = 1, y'(0) = 1$ toteuttava ratkaisu.

6. Ratkaise $y'' + 4y = 3 \cos(2x)$.

7.* Ratkaise differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu ja alkuehdot $y(1) = \frac{1}{3}, y'(1) = 3$ toteuttava ratkaisu. Vihje: Tee sijoitus $z = y'$.

$$y'' - \frac{y'}{x} = x, x > 0$$

8.* Osoita: Jos vakiokertoimisen 2. kertaluvun differentiaaliyhtälön $y'' + ay' + by = 0$ karakteristisella polynomilla on kaksinkertainen reaalinen nollakohta $= \lambda$, niin $y_1(x) = e^{\lambda x}, y_2(x) = xe^{\lambda x}$ ovat sen kaksi lineaarisesti riippumatonta ratkaisua.

Vihje: Kun λ on kaksinkertainen juuri, voidaan kertoimet a ja b esittää λ :n avulla.

9.* Ratkaise $y'' - y = e^x$. Etsi EY:n jokin ratkaisu vakioiden varioimiskeinolla, vaikka yrittäällä tehtävä ratkeaisikin helpommin.

10.* Ratkaise $y'' + y = 2e^{-x} \sin(x)$.