

MAT-21160 Algoritmimatematiikka (3 op)

Tentti 24.05.2010

Ei laskinta tai kirjallista materiaalia. Tautologia- ja interferenssikokoelma kääntöpuolella.

Esitä tehtävät 1 ja 2 yhdellä konseptilla ja tehtävät 3 ja 4 toisella.

Laita molempiin konsepteihin nimesi ja opiskelijanumerosi.

1. Todista teoria $((A \vee B) \rightarrow C) \wedge (\neg(D \wedge E) \rightarrow \neg C) \rightarrow (A \rightarrow D)$. Alla on annettu todistukselle runko. Kirjoita se täydennettynä vastauspaperiisi.

1.	_____	P
2.	_____	P
3.	_____	P (alitodistus)
4.	_____	3. Add
5.	_____	1., 4. _____
6.	_____	2., 5. MT
7.	_____	6. Simp
8.	_____	3., 7. CP (alitod)
M.O.T.		1., 2., 8. CP

2. Olkoon $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ja relaatio $Q : X \leftrightarrow X$ siten, että $Q = \{(1, 2), (1, 3)\}$.

- (a) Muodosta relaatiolle Q refleksiivinen sulkeuma $R = r(Q)$, relaatiolle R symmetrinen sulkeuma $S = s(R)$ ja edelleen relaatiolle S transitiivinen sulkeuma $T = t(S)$. Esitä sulkeumat sekä joukkoina että graafisesti.
- (b) Jos kohdan (a) relaatio T on ekvivalenssirelaatio, perustele miksi ja esitä sen määräämä ekvivalenssiluokka [3]. Jos T ei ole ekvivalenssirelaatio, anna todistus sille, ettei se ole.

Vihje: Sulkeumassa joukkoa täydennetään sellaiseksi joukoksi, jolla on haluttu ominaisuus.

Esitä tehtävät 1 ja 2 yhdellä konseptilla ja tehtävät 3 ja 4 toisella.

Laita molempiin konsepteihin nimesi ja opiskelijanumerosi.

3. (a) Todista $4n^2 - 5n + 2\sqrt{n} = O(n^2)$, missä $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Funktio $f = \text{min} \circ \langle \ln \circ 2, \text{prod} \circ \langle 2, 1 \rangle \rangle$ on esitetty supistetussa prefix-muodossa. Siinä esiintyvät funktiot min (minimi kahdesta syötteestä), \ln (luonnollinen logaritmi) ja prod (tulo kahdesta syötteestä) sekä valintafunktiot 1 ja 2 . Esitä f infix-muodossa (eli $f(x, y) = \dots$) ja laske $f\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.
4. (a) Esitä joukko $A = \{1, 4, 7, 10, 13, \dots\}$ induktiivisesti.
- (b) Esitä seuraava rekursiivisesti annettu funktio $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ei-rekursiivisesti:

$$f(1) = 1 \quad \text{ja} \quad f(n+1) = 2f(n)$$

- (c) Joukosta B tiedetään seuraavaa: $B \in \mathcal{P}(X)$ (potenssijoukko), missä $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Lisäksi $|B| = 2$ ja $B \cap \{2\} = \emptyset$. Ilmoita alkioittain KAIKKI mahdollisuudet joukoksi B .