

MAT-51706 Bayesian methods: Exam 22.5.2009

Books, notes, calculator, computer (including WinBUGS, Matlab, and WWW) may be used; communication is not allowed. Show intermediate steps used in obtaining answers.

Kirjoja, muistiinpanoja, laskinta, tietokonetta (mukaanlukien WinBUGS, Matlab, ja WWW) saa käyttää; yhteyttä toiseen ihmiseen ei saa ottaa. Näytä ratkaisun välivaiheet.

1. The inhabitants of an island lie with probability $\frac{2}{3}$. One day, after you hear inhabitant A make a statement, you ask another inhabitant whether A spoke truthfully and she answers 'yes'.

(a) What is the probability that A spoke truthfully? (Use the notation θ_1 : 'A lied', θ_2 : 'A spoke truthfully'.)

(b) You can either claim that A is a liar (a_1) or trust his statement (a_2). What is the Bayes decision

$$\text{when your loss function is } \begin{array}{cc} & \theta_1 & \theta_2 \\ a_1 & 0 & 2 \\ a_2 & 1 & 0 \end{array} ?$$

Erään saaren asukkaat valehtelevat todennäköisyydellä $\frac{2}{3}$. Eräänä päivänä asukas A antaa lausunnon. Sinä kysyt toiselta asukkaalta 'puhuiko A totta?' ja hän vastaa 'kyllä'.

(a) Mikä on todennäköisyys, että A puhui totta? (Käytä merkintää θ_1 : 'A valehteli', θ_2 : 'A puhui totta'.)

(b) Voit joko väittää A:ta valehtelijaksi (a_1) tai luottaa lausuntoon (a_2). Mikä on Bayes-päätös, kun

$$\text{häviöfunktiosi on } \begin{array}{cc} & \theta_1 & \theta_2 \\ a_1 & 0 & 2 \\ a_2 & 1 & 0 \end{array} ?$$

2. The manager of a small movie theatre informs you that the number of patrons coming to the Monday evening shows is, on average, 20, with a variance of 2. The numbers of tickets sold at recent Monday evening shows are:

50, 36, 58, 62, 40, 73, 80, 41

(a) Find the posterior distribution $p(\theta | y)$, assuming a Gamma prior and $y_i | \theta \sim \text{Poisson}(\theta)$ mutually conditionally independent given θ .

(b) Find a posterior 95% credibility interval (without WinBUGS).

(c) Use WinBUGS to answer (b) and to find $P(32 \leq \theta \leq 35 | y)$. Show your WinBUGS code.

Pienen elokuvateatterin johtaja kertoo, että maanantai-illan asiakasmäärä on keskimäärin 20, varianssi on 2. Viimeaikaisten maanantai-illan näytösten lippumyynnitulokset ovat:

50, 36, 58, 62, 40, 73, 80, 41

(a) Laske posteriorijakauma $p(\theta | y)$, olettaen Gamma priori ja $y_i | \theta \sim \text{Poisson}(\theta)$ ehdollisesti riippumattomia ehdolla θ .

(b) Laske posteriorijakauman 95% luottoväli (ilman WinBUGSia).

(c) Käytä WinBUGSia laskemaan (b) sekä $P(32 \leq \theta \leq 35 | y)$. Näytä WinBUGS-koodisi.

3. A child is classified as being *below average* if her IQ is less than 90, *average* if her IQ is between 90 and 110, and *above average* if her IQ is over 110. IQ's in the general population have the $\text{Normal}(100, 15^2)$ distribution. A certain test's score has the distribution $y | \text{IQ} \sim \text{Normal}(\text{IQ}, 10^2)$. Bertha scores 115 on this test. Find the Bayes factor and the posterior odds in favour of the hypothesis H_0 : "Bertha is average" against the hypothesis H_1 : "Bertha is above average".

Lapsi luokitellaan *alle keskitasoiseksi* jos hänen älykkyydosamääränsä (ÄO) jää alle 90, *keskitasoiseksi* jos ÄO on 90:stä 110:een, tai *yli keskitasoiseksi* jos ÄO on yli 110. ÄO koko populaatiossa noudattaa $\text{Normal}(100, 15^2)$ jakaumaa. Erään testin tulos noudattaa $y | \text{ÄO} \sim \text{Normal}(\text{ÄO}, 10^2)$ jakaumaa. Berthan tulos tässä älykkyytestissä on 115. Etsi Bayes-tekijä ja posteriori vedonlyöntisuhde hypoteesin H_0 : 'Bertha on keskitasoa' puolesta hypoteesia H_1 : 'Bertha on yli keskitasoa' vastaan.

more questions on the other side of the paper / lisää kysymyksiä sivun toisella puolella

4. Consider the following lifetime observations $y_{1:21}$:

12.68, 1.64, 10.50, 4.51, 1.67, 13.90, 6.93, 2.04, 11.64, 7.73, 2.96,
10.00, 1.18, 8.58, 5.46, 7.35, 14.50, 5.09, 14.48, 5.50, 14.78

In addition there are 4 observations $y_{22:25}$ that are less than 1, and 11 observations $y_{26:36}$ that are greater than 15; the actual values are not given.

- Find the likelihood $p(y_{1:36} | \theta)$, assuming $y_i | \theta \sim \text{Exp}(\theta)$ mutually conditionally independent given θ .
- Find the mean and 95% credibility interval for $\theta | y_{1:36}$ using WinBUGS. Show your WinBUGS code.
- Give the details (pseudo-code) of a Gibbs sampler algorithm for simulating the posterior distribution.

Tarkastellaan seuraavia elinikämittauksia $y_{1:21}$:

12.68, 1.64, 10.50, 4.51, 1.67, 13.90, 6.93, 2.04, 11.64, 7.73, 2.96,
10.00, 1.18, 8.58, 5.46, 7.35, 14.50, 5.09, 14.48, 5.50, 14.78

Näiden lisäksi on 4 mittausta $y_{22:25}$, jotka ovat pienempiä kuin 1, sekä 11 mittausta $y_{26:36}$, jotka ovat suurempia kuin 15; todellisia arvoja ei tiedetä.

- Etsi uskottavuusfunktio $p(y_{1:36} | \theta)$, olettaen $y_i | \theta \sim \text{Exp}(\theta)$ ehdollisesti riippumattomia ehdolla θ .
- Etsi posteriorille $\theta | y_{1:36}$ odotusarvo sekä 95% luottoväli WinBUGSia käyttäen. Näytä WinBUGS-koodisi.
- Kirjoita Gibbsin otanta-algoritmi (pseudokoodi) posteriorijakauman simuloimiseksi.

5. The times (in days) needed by employees A and B to complete four different tasks are

task i	1	2	3	4
$T_{A,i} - T_{\text{ref},i}$	2.9	1.3	2.1	0.9
$T_{B,i} - T_{\text{ref},i}$	1.7	1.6	1.2	-0.2

where $T_{\text{ref},i}$ is the nominal time required for task i . Today they are given a new task; both of them get the same task. What is the probability that A gets it done faster than B? Assume that the tabulated data is normally distributed with unknown mean and variance. Don't use WinBUGS.

Kahden työntekijän A ja B tarvitsemat ajat (päivissä) neljän erilaisen työtehtävän suorittamiseen ovat

tehtävä i	1	2	3	4
$T_{A,i} - T_{\text{ref},i}$	2.9	1.3	2.1	0.9
$T_{B,i} - T_{\text{ref},i}$	1.7	1.6	1.2	-0.2

jossa $T_{\text{ref},i}$ on tehtävään i tarvittavien päivien standardimäärä. Tänään heille annetaan uusi työtehtävä; molemmille annetaan sama tehtävä. Mikä on todennäköisyys, että A suoriutuu työtehtävästään nopeammin kuin B? Oleta, että taulukon data on normaalijakautunut tuntemattomalla keskiarvolla ja varianssilla. Älä käytä WinBUGSia.