**MAT-10341 Insinöörimatematiikka A4. tentti 9.4.2010. (Pirttimäki).**

Ei laskinta , kaavat kääntöpuolella.

1. (i) Laske yksikkötangentti ja päänormaali ruuvikäyrän $\mathbf{r}(t) = (2t, \cos t, \sin t)$ pisteeseen $(\pi, 0, 1)$.

   (ii) Olkoon $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$. Laske $\nabla f(3,4)$ ja suunnattu derivaatta vektorin (-1,-1) suuntaan. Minkä vektorin suuntaan f kasvaa voimakkaimmin?

**2.** Olkoon $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$

   (i) Muodosta f:n lineaariapproksimaatio pisteessä (1,1) ja laske lineaariapproksimaation avulla likiarvo luvulle $e^{1.1^2 - 0.9^2}$.

   (ii) Laske myös f:n toisen kertaluvun approksimaatio tässä pisteessä.

**3.** (i) Kappale liikkuu pitkin käyrää $\mathbf{r}(t) = \frac{t^2}{2}\mathbf{i} + 4\frac{t^{3/2}}{3}\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$.

   Kun kappale on liikkunut käyrää pitkin origosta 16 pituusyksikköä eteenpäin (t>0), niin missä avaruuden $\mathbb{R}^3$ pisteessä se silloin on?

   (ii) Onko funktiolla $h(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$ raja-arvoa origossa. Mikä on funktion h(x,y) määrittelyjoukko.

**4.** Etsi funktion

$$f(x, y) = 4x + 2y - 8xy + 1$$

suurin ja pienin arvo siinä rajoitetussa joukossa, jota rajoittavat suorat x=0, y=0 ja x+y=1. (huom! Reunat kuuluu joukkoon)

# MAT-10341 Insinöörimatematiikka A4.

Kaavoja

1. $\mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}, \qquad \mathbf{n}(t) = \dfrac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$

2. $s = \displaystyle\int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$

3. $a = 2\pi \displaystyle\int_a^b |y(t)|\, \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$

4. $\kappa(s) = \|\mathbf{r}''(s)\| = \left\| \dfrac{d\mathbf{T}}{ds} \right\|, \qquad \kappa(t) = \dfrac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}, \qquad \kappa(t) = \dfrac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$

5. $f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})\,\mathbf{h} + o(\mathbf{h})$

6. $f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \dfrac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T H(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$

7. $F(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(y_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), y_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, y_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)),$

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_k}, \qquad 1 \le k \le m$$

8. $f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$

9. $\begin{cases} g(x,y) = 0 \\ \nabla f + \lambda \nabla g = \mathbf{0} \end{cases}$

10. $\begin{cases} g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \\ \nabla f + \lambda \nabla g + \mu \nabla h = \mathbf{0} \end{cases}$