MAT-20450 FOURIER'N MENETELMÄT
TENTTI 30.11. 2005

1. Funktio f(t) on määritelty seuraavasti : $f(t) = \begin{cases} 2, & -2 < t < 0 \\ 1, & 0 < t < 2 \end{cases}$, $f(t+4) = f(t)$.

a) Hahmottele funktion f(t) kuvaaja välillä (-6 , 6) .
b) Määritä funktion f(t) Fourier-sarja.

2. Tarkastellaan 2π-jaksoista funktiota $f(t) = t \cos t$, $-\pi < t < \pi$, $f(t+2\pi) = f(t)$, jonka Fourier-sarja on annettu : $f(t) = -\frac{1}{2} \sin t + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 - 1} \sin(nt)$.
Muodosta funktion $g(t) = t \sin t$, $-\pi < t < \pi$, $g(t+2\pi) = g(t)$ Fourier-sarja integroimalla f(t):n Fourier-sarja termeittäin.
Mikä on g(t):n Fourier-sarjan summa pisteessä t=0 ?

3. Sovella tehtävän 2 funktioon $f(t) = t \cos t$, $-\pi < t < \pi$, $f(t+2\pi) = f(t)$
Parsevalin lausetta muodossa $\frac{1}{T} \int_{d}^{d+T} (f(t))^2 \, dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$.

Minkä arvon saat tällöin sarjan $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2 - 1)^2}$ summalle?

4. Totea laskemalla , että funktion $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$ Fourier-muunnos on

$F(j\omega) = 2 \operatorname{sinc}(\omega)$. Etsi tätä hyväksikäyttäen funktion $k(t) = f(t) - \frac{1}{2} f(2t)$ Fourier-muunnos. Piirrä funktion $k(t) = f(t) - \frac{1}{2} f(2t)$ kuvaaja.