

MAT-13420 Laaja matematiikka 2
Tentti 20.2.2006

Perustele ratkaisusi tarkasti

1. Oletetaan, että reaalikujonot (a_n) ja (b_n) suppenevat ja $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ sekä $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Osoita, että

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$.

2. Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funktio.

(a) Määrittele funktion f jatkuvuus.

(b) Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{kun } x \text{ on irrationaalinen} \\ 1, & \text{kun } x \text{ on rationaalinen.} \end{cases}$$

Selvitä, missä pisteissä f on jatkuva. Perustele vastauksesi määritelmän nojalla. Onko funktiolla f derivaatta jossain pisteessä?

3. Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

kun $x > 0$. Laske funktion f derivaatta määritelmän nojalla ja $(f^{-1})'(\sqrt{1/5})$.

4. Osoita määritelmän nojalla, että lukujono $\left(\frac{2+4n+3n^2}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ suppenee.

5. Olkoon

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1}{x^2}, \text{ kun } x \neq 0.$$

Selvitä perustellen, onko olemassa raja-arvoa

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$