



MAT-10311 Insinöörimatematiikka A1

Tentti 23.10.2009

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja eikä laskinta!

T1. a) Osoita induktiotodistuksella, että n :n ensimmäisen **parittoman** luonnollisen

$$\text{luvun summa } 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2$$

b) Osoita induktiotodistuksella, että n :n ensimmäisen **parillisen** luonnollisen luvun

$$\text{summa } 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = \sum_{i=1}^n 2i = n(n+1)$$

c) Osoita **suoralla** todistuksella (eli vedoten a)- ja b)-kohtien tuloksiin), että n :n ensimmäisen luonnollisen luvun summa

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

(Voit olettaa, että n :n ensimmäisen luonnollisen luvun joukossa on yhtä monta paritonta ja parillista, sillä jos luku n on pariton, niin voidaan ajatella mukaan parillinen luku 0, joka ei summaa kasvata.)

T2. a) Esitä kompleksilukujen polaarissa eksponentiaalimuodossa ($z = re^{j\theta}$),

$$\text{luvut } 1, -1 \text{ ja } \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + j).$$

b) Esitä muodossa $x + jy$ lukujen 1 ja -1 neljännet juuret (, joita kummallakin on 4 kpl).

T3. Olkoon tason P parametrinen esitys $\mathbf{x} = s(3,2,1) + t(2,1,1) + (-2,0,1)$.

a) Anna parametriesitys sellaiselle suoralle L, joka on kohtisuorassa P:tä vastaan ja kulkee origon kautta.

b) Etsi **yksikkövektori** \mathbf{n} ja luku c siten, että P:llä on yhtälö $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = c$.

T4. Olkoot A ja B symmetrisiä matriiseja.

a) Osoita, että jos AB on symmetrinen matriisi, niin $AB = BA$.

b) Olkoot edellämainitut A ja B 2×2 -matriiseja. Osoita, että tulon AB symmetrisyys edellyttää, että A:n päälävistäjäalkiot ovat yhtäsuuret ja B:n päälävistäjäalkiot ovat yhtäsuuret. (Osoita yleisesti, ei esimerkitapauksilla.)

$$\text{Jos tarvitset jossain tehtävässä: } \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$