

# MAT-13450 Laaja matematiikka 5

Tentti 22.05.2009

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!

1. Laske integraali  $\iint_{\Omega} \cos y \, da$ , kun  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi, |y| \leq x\}$ .
2. Kappale  $S \subset \mathbb{R}^3$  muodostuu joukosta, jota rajoittavat pinnat  $z = x^2$ ,  $z = 8 - x^2$ ,  $y = -1$  ja  $y = -3$ . Laske  $S$ :n tilavuus.
3. Tarkastellaan funktiota  $y(x)$  koskevaa differentiaaliyhtälöä  
 $1 + y^2 + xy' = 0$ .
  - a) Mitä seuraavista tyypeistä yhtälö on: lineaarinen, ensimmäistä kertalukua, vakiokertoiminen?
  - b) Hae yhtälölle sellainen ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon  $y(1) = 1$ .

4. Muunna funktioita  $y(t)$ ,  $u(t)$  koskeva differentiaaliyhtälöpari

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 3y = \sin t \\ u' - 4y = e^t \end{cases}$$

differentiaaliyhtälösystemiksi (normaaliryhmäksi)

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t).$$

5. Tarkastellaan differentiaaliyhtälösystemiä  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ , kun  $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ .
  - a) Laske eksponenttimatriisi  $e^{At}$ .
  - b) Ratkaise systeemi alkuarvolla  $\mathbf{x}(0) = [0 \ 2]^T$ .
  - c) Onko systeemi tasapainopisteessään  $\mathbf{0}$  stabiili?