

Insinöörimatematiikka X 1

Tentti 03.08.2009

Ei laskinta tai kirjallista materiaalia.

Kurssilla on käsitelty mm. seuraavia kaavoja, joista joitakin saatat tarvita:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}, \quad \text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}, \quad \cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$
$$d(\mathbf{b}, l) = \|\mathbf{v} - \text{proj}_d(\mathbf{v})\|, \quad d(\mathbf{b}, \mathcal{P}) = \|\text{proj}_{\mathbf{n}}(\mathbf{v})\|$$

- (a) Näytä totuustaulukon avulla, että $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$ on tautologia.
(b) Mikä on lauseen $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{N} : x^2 = y$ negaatio? Kerro perustellen, mikä on tämän lauseen totuusarvo ja mikä negaation totuusarvo.

- (a) Todista induktiolla, että $n^2 > 2n$ "tarpeeksi" suurille arvoille $n \in \mathbb{N}$.
Vihje: Ota ensin selvää, mistä arvosta alkaen väite pätee.

- (b) Funktion $f : A \rightarrow B$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$ tiedetään olevan surjektio. Kerro perustellen, mitkä ovat joukot A ja B . Jos käänteisfunktio f^{-1} on olemassa, mikä on sen lauseke?

3. Olkoot

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Vektorit \mathbf{a} ja \mathbf{b} ovat suoran l normaaleja. Tason P yhtälö on $x - y + 2z = 4$. Suoran l ja tason P leikkauspiste sijaitsee z -akselilla.

- (a) Esitä suoran l ja tason P yhtälöille parametriesitykset.

Vihje: Tasoa varten tarvitset kaksi ei-yhdensuuntaista suuntavektoria.

- (b) Mikä on suoran l suuntavektorin projektio tason P normaalille?

4. Tasot P_1 , P_2 ja P_3 on määritelty kaavoilla $x + 4y + 4z = 2$, $2x + 3y - z = 2$ ja $-x + 2y + 2z = 2$. Käytä Gaussin eliminointimenetelmää tutkiessasi, onko olemassa pistettä, jossa kaikki kolme tasoa leikkaavat?