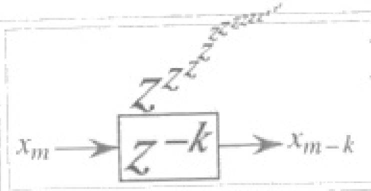

MAT-20600 Diskreetti matematiikka

Tentti 11.5.2009

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta
- Kirjoita konsepteihin DiMa, nimesi ja numerosi
- Piirrä pääkonseptiin nimen alle neljä neliötä vierekkäin a' 2 × 2.

1. **(a)** Määritä seuraavat arvot

$$\int_2^7 2t\,H(t-3)\,dt\ ,\quad \int_2^7 17\sin(3t\pi/8)\delta(t-2)\,dt\ ,\quad \int_2^7 te^{-t^2}H(t-1)\delta(t-8)\,dt.$$

(b) Etsi z-muunnos jonolle $\left\{\dfrac{3k}{5^k} - 3\delta_{k-5} + \cos(k\pi)\right\}$.

2. Olkoon $x_k = 2 + \dfrac{1}{4^k}$. Ratkaise käyttäen z-muunnosta seuraava differenssiyhtälö

$$4y_k - 4y_{k-1} + y_{k-2} = x_k - x_{k-1}$$

3. Syt:lle Bezout'n muoto on lukujen lineaariyhdelmä. Pyj:lle Bezout'n muoto on lukujen harmoninen yhdelmä eli

$$\frac{1}{\mathrm{pyj}(a,b)} = \frac{c_1}{a} + \frac{c_2}{b},\ c_i \in \mathbb{Z}.$$

(a) Todenna tämä yleisesti.

(b) Kirjoita pyj(206, 200):lle sen Bezout'n muoto.

4. **(a)** Jos p on pariton alkuluku, niin osoita, että tällöin

$$1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (p-2)^2 \equiv (-1)^{(p+1)/2} \mod p.$$

(b) Graafi $G = (V, E)$, missä $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_8\}$ ja

$$E = \{(v_1, v_6), (v_2, v_3), (v_2, v_6), (v_2, v_7), (v_2, v_8), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_5), (v_6, v_7)\}.$$

i) Onko graafi yksinkertainen?
ii) Suorita syvyysetsintä aloittaen pisteestä v_3 graafille G. Esitä selkeästi etsinnän järjestys ja lopuksi DFS-puu havainnollisesti kuvana.

Käännä!

$x_m \longrightarrow \boxed{z^{-k}} \longrightarrow x_{m-k}$

MAT-20600 Diskreetti matematiikka
Kaavakokoelma tentissä 2009

Taulukko z-muunnoksista.

$x_k = ka^{k-1}$, a on vakio	$X(z) = \dfrac{z}{(z-a)^2}$,	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$x_k = \cos(k\omega T)$, ω, T ovat vakioita	$X(z) = \dfrac{z\big(z-\cos(\omega T)\big)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}$,	$\lvert z\rvert > 1$
$x_k = \sin(k\omega T)$, ω, T ovat vakioita	$X(z) = \dfrac{z\sin(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}$,	$\lvert z\rvert > 1$

Ominaisuudet:

1. $\mathcal{Z}\big(\{x_{k-k_0}\}\big) = \frac{1}{z^{k_0}}\mathcal{Z}\big(\{x_k\}\big)$

2. $\mathcal{Z}\big(\{x_{k+k_0}\}\big) = z^{k_0}X(z) - \displaystyle\sum_{p=0}^{k_0-1} x_p z^{k_0-p}$

3. $\mathcal{Z}\big(\{a^k x_k\}\big) = X(z/a)$

4. $\mathcal{Z}\big(\{k^n x_k\}\big) = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^n X(z)$

5. $\mathcal{Z}\big(\{(x*y)_k\}\big) = \mathcal{Z}\left(\left\{\displaystyle\sum_{p=0}^{k} x_p y_{k-p}\right\}\right) = X(z)Y(z)$