

# MAT-13430 Laaja matematiikka 3

Tentti 30.01.2009

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!

1. Olkoon funktio  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differentioituva pisteessä  $x = 0$ . Osoita, että silloin

on kaikilla  $a \in \mathbb{R}$  voimassa: 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(ax^2) - f(0)}{x} = 0.$$

2. Mitkä seuraavista väittämistä ovat tosia, mitkä eivät:

a) Jos jono  $\{a_n\}$  suppenee, niin myös jono  $\{a_n\}$  suppenee.

b) Monotonisen jonon jokainen osajono on monotoninen.

c) Jos  $f^2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva, niin  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva.

d) Jos  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva, niin  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .

e) Jos funktio  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on differentioituva pisteessä  $x_0$ , niin se on jatkuva pisteessä  $x_0$ .

f) Jos  $f^2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on differentioituva, niin  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on differentioituva.

3. Tarkastellaan polynomia  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + 4$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

a) Montako reaalijuurta  $f$ :llä on?

b) Mikä on funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  arvojoukko  $A = f(\mathbb{R})$ ?

c) Osoita, että funktiolla  $f: \mathbb{R} \rightarrow A$  on käänteisfunktio  $f^{-1}: A \rightarrow \mathbb{R}$ .

d) Laske derivaatta  $(f^{-1})'(4)$ .

4. a) Tutki, suppeneeko integraali  $\int_0^{\infty} x e^{-2x} dx$  ja myönteisessä tapauksessa laske sen arvo.

b) Pitääkö paikkansa:  $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^3} dx = \frac{3}{8}$ ? Ellei, niin korjaa ja selvitä tilanne.

5. Tutki alla olevista sarjoista, onko kyseessä suppeneva, itseisesti suppeneva, ehdollisesti suppeneva vai hajaantuva sarja:

a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2 + 1}$

b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} k}{k^2 + 1}$

c)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ .