

MAT-31080

Kompleksimuuttujan funktiot

Tentti 30.1. 2009

Ei muistiinpanoja, laskimia, taulukoita.

1. Määrittele yleinen potenssifunktio z^α , kun z ja α ovat kompleksilukuja. Etsi lausekkeen i^{2i} kaikki arvot.

2. Onko funktio $u(x,y)=\sinh(x)\sin(y)$ harmoninen? Myönteisessä tapauksessa muodosta

- a) $u(x,y)$:n harmoninen liittofunktio $v(x,y)$
- b) analyyttinen funktio, jonka reaaliosa on $u(x,y)$

3. Mitkä ovat funktion

$$f(z) = \frac{ze^z}{(z+1)}$$

äärelliset nollat ja navat? Onko funktiolla nollia, napoja tai oleellisiä erikoispisteitä äärettömyydessä?

4. Olkoon funktio $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analyyttinen pistettä α lukuun ottamatta. Määrittele sen residy pisteessä α . Oletetaan edelleen, että funktiolla f on pisteessä α yksinkertainen napa. Johda laskukaava raja-arvon avulla residylle.

5. Määrittele funktion $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ Laplace-muunnos $F(s) = L[f(t)]$. Tarkastele myös millä ehdoilla se on olemassa. Mitkä ovat funktion $f(t)$ ensimmäisen ja toisen derivaatan $f'(t)$ ja $f''(t)$ Laplace-muunnokset lausuttuina $F(s)$:n avulla.