73116 Algoritmimatematiikka, Kaarakka, Syksy 2005

Kurssikuulustelu 31.10.2005.

Ratkaise kaikki viisi tehtävää. Perustele välivaiheet huolellisesti.

1. Todista induktiolla, että 6 on luvun $n^3 - n$ tekijä, kaikilla $n \in \mathbb{N}, n > 1$.

2. Osoita, että $\ln n = o(n)$.

3. Osoita tunnettujen ekvivalenssien ja interferenssisääntöjen nojalla (ei totuustaulun), että seuraava teoria on pätevä

$$(A \vee B \to C) \wedge (C \to D \wedge E) \to (A \to D).$$

4. Tarkastellaan relaatiota $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$R = \{\langle a, b\rangle : \ |a| = |b|\}.$$

Osoita, että R on ekvivalenssirelaatio ja määrää ekvivalenssiluokat.

5. Muodosta rekursiivinen funktio, joka laskee annetun listan pituuden ja näytä funktion toimivuus listan $\langle V, I, I, S, I\rangle$ avulla.

$P \vee 1 \equiv 1$	$P \wedge 1 \equiv P$	$P \to 1 \equiv 1$
$P \vee 0 \equiv P$	$P \wedge 0 \equiv 0$	$P \to 0 \equiv \neg P$
$P \vee P \equiv P$	$P \wedge P \equiv P$	$1 \to P \equiv P$
$P \vee \neg P \equiv 1$	$P \wedge \neg P \equiv 0$	$0 \to P \equiv 1$
$\neg\neg P \equiv P$	$P \to P \equiv 1$	$P \to Q \equiv \neg P \vee Q$
$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$	$\neg(P \to Q) \equiv P \wedge \neg Q$	

$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$
$P \vee Q \equiv Q \vee P$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R))$

$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$A \wedge (A \vee B) \equiv A$
$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$	$A \vee (A \wedge B) \equiv A$
	$A \wedge (\neg A \vee B) \equiv (A \wedge B)$
	$A \vee (\neg A \wedge B) \equiv (A \vee B)$

MP $\dfrac{A \quad A \to B}{\therefore B}$	MT $\dfrac{A \to B, \neg B}{\therefore \neg A}$	Conj $\dfrac{A, B}{\therefore A \wedge B}$	Simp $\dfrac{A \wedge B}{\therefore A}$
Add $\dfrac{A}{\therefore A \vee B}$	DS $\dfrac{A \vee B, \neg B}{\therefore A}$	HS $\dfrac{A \to B, B \to C}{\therefore A \to C}$	

UI $\dfrac{\forall x \ W(x)}{\therefore \ W(t)}$	UG $\dfrac{W(t)}{\therefore \ \forall x, W(x)}$	EG $\dfrac{W(t)}{\therefore \ \exists x, W(x)}$	EI $\dfrac{\exists x \ W(x)}{\therefore \ W(t)}$

$\neg\forall x\, W(x) \equiv \exists x\, \neg W(x)$	$\neg\exists x\, W(x) \equiv \forall x\, \neg W(x)$
$\exists x\, (A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$	$\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$
$\exists x\, (A(x) \to B(x)) \equiv \forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)$	$\forall x\, \forall y\, W(x,y) \equiv \forall y\, \forall x\, W(x,y)$
$\exists x\, \exists y\, W(x,y) \equiv \exists y\, \exists x\, W(x,y)$	

$\forall x\, (C \vee A(x)) \equiv C \vee \forall x\, A(x)$	$\forall x\, (C \wedge A(x)) \equiv C \wedge \forall x\, A(x)$
$\exists x\, (C \vee A(x)) \equiv C \vee \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (C \wedge A(x)) \equiv C \wedge \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (C \to A(x)) \equiv C \to \forall x\, A(x)$	$\exists x\, (C \to A(x)) \equiv C \to \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (A(x) \to C) \equiv \exists x\, A(x) \to C$	$\exists x\, (A(x) \to C) \equiv \forall x\, A(x) \to C$

$\forall x\, A(x) \to \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \to \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$
$\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \to \forall x\, (A(x) \vee B(x))$	$\forall x\, (A(x) \to B(x)) \to (\forall x\, A(x) \to \forall x\, B(x))$
$\exists y\, \forall x\, W(x,y) \to \forall x\, \exists y\, W(x,y)$.	