

MAT-20600 Diskreetti matematiikka

Tentti 29.9.2008

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta
- Kirjoita konsepteihin DiMa, nimesi ja numerosi
- Piirrä pääkonseptiin nimen alle vierekkäin neljä neliötä $a' 2 \times 2$.

--	--	--	--

1. (a) Määritä seuraavat arvot

$$\int_1^5 2t H(t-2) dt, \quad \int_1^5 2t \cos(2t\pi) \delta(t-3) dt, \quad \int_1^5 e^{0.1t} H(t-3) \delta(t-2) dt.$$

- (a) Jos $x_k = 1/10^k \cos(k\pi/3)$, niin määritä $\mathcal{Z}(\{x_{k+1} + 3x_k\})$.

2. (a) Etsi käänteismuunnos $\mathcal{Z}^{-1}[Y(z)]$, kun $Y(z)$ on

$$\frac{7z^2 - 9z + 4}{(z-1)^2}.$$

- (b) Jonon $\{y_k\}$ z-muunnos

$$Y(z) = \frac{z}{5(3z-1)(5z-1)} + \frac{3z}{4z^2+4}$$

jakaantuu selvästi kahden lausekkeen U ja V summaksi. Näin myös jono $\{y_k\}$ rakentuu kahden jonon summasta. Osoita, että toinen jonoista (valitse oikea!) "vaimenee" eli sen termien raja-arvo on nolla. Laske vaikuttamaan jäävän jonon termit tarkasti.

3. (a) Etsi Bezoutin muoto lukujen 143 ja 131 suurimmalle yhteiselle tekijälle.

- (b) Jos n on positiivinen kokonaisluku ja p on alkuluku, niin suurin sellainen k , että $p^k \mid n!$, on

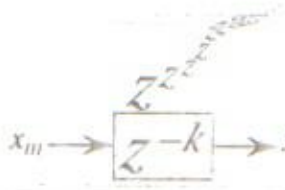
$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor.$$

Laske yllä oleva summa, kun $n = 50$ ja $p = 2$. Jakaako 2^{48} luvun $50!$? Montako nollaa on luvun $50!$ lopussa?

4. (a) Valitaan kokonaisluku M ja sellainen N , että sen numerot ovat käänteisessä järjestyksessä luvun M numerot (esimerkiksi jos $M = 6923$, niin $N = 3296$). Osoita, että erotus $N - M$ on aina jaollinen luvulla 9.

- (b) Kerro lyhyesti, mitä tarkoitetaan graafiteorian käsitteillä pisteen aste, reitti ja juuri.

Käännä!



MAT-20600 Diskreetti matematiikka

Kaavakokoelma tentissä 2008

Taulukko z-muunnoksista.

$$x_k = ka^{k-1}, a \text{ on vakio} \quad X(z) = \frac{z}{(z-a)^2}, \quad |z| > |a|$$

$$x_k = \cos(k\omega T), \omega, T \text{ ovat vakioita} \quad X(z) = \frac{z(z - \cos(\omega T))}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}, \quad |z| > 1$$

$$x_k = \sin(k\omega T), \omega, T \text{ ovat vakioita} \quad X(z) = \frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}, \quad |z| > 1$$

Ominaisuudet:

$$1. \mathcal{Z}(\{x_{k-k_0}\}) = \frac{1}{z^{k_0}} \mathcal{Z}(\{x_k\})$$

$$2. \mathcal{Z}(\{x_{k+k_0}\}) = z^{k_0} X(z) - \sum_{p=0}^{k_0-1} x_p z^{k_0-p}$$

$$3. \mathcal{Z}(\{a^k x_k\}) = X(z/a)$$

$$4. \mathcal{Z}(\{k^n x_k\}) = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^n X(z)$$

$$5. \mathcal{Z}(\{(x * y)_k\}) = \mathcal{Z}\left(\left\{\sum_{p=0}^k x_p y_{k-p}\right\}\right) = X(z)Y(z)$$