

MAT-20600 Diskreetti matematiikka

Tentti 12.5.2008

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta
- Kirjoita konsepteihin DiMa, nimesi ja numerosi
- Piirrä pääkonseptiin nimen alle neljä neliötä vierekkäin $a' 2 \times 2$.

--	--	--	--

1. (a) Osoita, että jokaista positiivista kokonaislukua n kohti

$$\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor, x \in \mathbb{R}.$$

(b) Etsi z-muunnos jonolle $\left\{ \frac{1}{5^k} \sin(k\pi/6) - 5 \right\}$.

2. Ratkaise käyttäen z-muunnosta seuraava differenssiyhtälö

$$y_{k+2} + 5y_{k+1} - 6y_k = \frac{1}{2^k}, \quad y_0 = 0, y_1 = 1.$$

3. (a) Osoita, että mikään muotoa $4n + 3$ oleva kokonaisluku ei ole kahden kokonaisluvun neliöiden summa.

(b) Mikä on luvun $2^{107} - 1$ viimeinen numero?

4. (a) Etsi kokonaislukuyhtälölle $51x + 43y = 7$ sellaiset ratkaisut, että ne ovat mahdollisimman lähellä nollaa.

(b) Graafin $G = (V, E)$ vieruspistematriisi on $n \times n$ -matriisi D , missä n on G :n pisteiden lukumäärä, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ja matriisin alkio

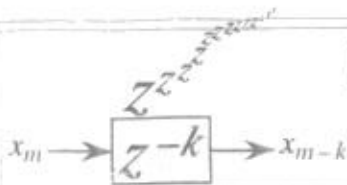
$$d_{ij} = \text{pisteitä } v_i \text{ ja } v_j \text{ yhdistävien viivojen lukumäärä.}$$

Suorita leveysetsintä graafille G aloittaen pisteestä v_6 . Esitä selkeästi etsinnän järjestys ja lopuksi BFS-puu havainnollisesti kuvana.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

MAT-20600 Diskreetti matematiikka

Kaavakokoelma tentissä 2008



Taulukko z-muunnoksista.

$$x_k = ka^{k-1}, a \text{ on vakio} \quad \frac{z}{(z-a)^2} \quad |z| > |a|$$

$$x_k = \cos(k\omega T), \omega, T \text{ ovat vakioita} \quad \frac{z(z - \cos(\omega T))}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1} \quad |z| > 1$$

$$x_k = \sin(k\omega T), \omega, T \text{ ovat vakioita} \quad \frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1} \quad |z| > 1$$

Ominaisuudet:

$$1. \mathcal{Z}(\{x_{k-k_0}\}) = \frac{1}{z^{k_0}} \mathcal{Z}(\{x_k\})$$

$$2. \mathcal{Z}(\{x_{k+k_0}\}) = z^{k_0} X(z) - \sum_{p=0}^{k_0-1} x_p z^{k_0-p}$$

$$3. \mathcal{Z}(\{a^k x_k\}) = X(z/a)$$

$$4. \mathcal{Z}(\{k^n x_k\}) = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^n X(z)$$

$$5. \mathcal{Z}(\{(x * y)_k\}) = \mathcal{Z}\left(\left\{\sum_{p=0}^k x_p y_{k-p}\right\}\right) = X(z)Y(z)$$