

Mat-10330 Insinöörimatematiikka X3

Tentti, 8.9.2008

Vastaa kaikkiin tehtäviin ja perustele vastuksesi. Ei laskinta, taulukoita tai kirjallisuutta.

1. (a) Laske raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x).$$

- (b) Laske derivaatan määritelmän avulla $f'(1)$, kun $f(x) = 2x^2 + 1$.

2. (a) Ratkaise yhtälö $\tanh(x) = -\frac{1}{2}$. Anna vastaus muodossa, jossa ei esiinny areafunktioita.

- (b) Tarkastellaan funktiota $f: (\infty, 0] \rightarrow [1, \infty)$, $f(x) = x^2 + 1$. Laske $(f^{-1})'(3)$.

3. (a) Laske osittaisintegroimalla

$$\int x \sin(x) dx.$$

- (b) Laske integraalin

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

arvo tai osoita, että integraali hajaantuu.

4. (a) Etsi potenssisarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}$$

suppenemissäde ja suppenemisväli.

- (b) Etsi funktion $f(x) = \sqrt{x}$ neljännen asteen Taylorin polynomi, jonka kehityskeskus on 1.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k, \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$