MAT-21160 Algoritmimatematiikka (Kevät 2008, Kaarakka)

Tentti 8.9. 2008

Vastaa jokaiseen kysymykseen ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta.

Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi, opiskelijanumerosi ja myös koulutusohjelmasi.

1. (a) (3 pistettä) Tarkastellaan relaatiota $\sim$ joukossa $\mathbb{Z}$, missä

$$a \sim b, \text{ joss } a + b \text{ on parillinen.}$$

   Osoita, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio.

   (b) (3 pistettä) Osoita, että $n^2 = o(2^n)$.

2. Vastaa lyhyesti (kyllä/ei) kohtien (a)-(f) kysymyksiin. Jokaisen kohdan **oikeasta vastauksesta saat yhden pisteen, väärästä vastauksesta vähennetään yksi piste** ja vastaamatta jättäminen on nolla pistettä. Tehtävän kokonaispistemäärä ei kuitenkaan mene negatiiviseksi.

   Tarkastellaan relaatiota

$$A = \{\langle n, 2n+1\rangle : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

   (a) Onko relaatio A refleksiivinen?
   (b) Onko relaatio A transitiivinen?
   (c) Onko relaatio A symmetrinen?
   (d) Onko relaatio A funktio?
   (e) Onko relaatio A injektio?
   (f) Onko relaatio A surjektio?

3. Osoita (ilman totuustaulua), että

$$((A \vee B) \to (B \wedge C)) \to (B \to C) \vee D$$

   on pätevä teoria.

4. (a) (4 pistettä) Teoria $\forall x\,(p(x) \to q(x)) \to (\exists x\, p(x) \to \exists x\, q(x))$ on seuraavan todistuksen mukaisesti pätevä. Perustele rivit, joissa perustelujen paikalla on kysymysmerkit.

1. $\forall x\,(p(x) \to q(x))$		????
2.	$\exists x\, p(x)$	????
3.	$p(d)$	????
4.	$p(d) \to q(d)$	????
5.	$q(d)$	????
6.	$\exists x\, q(x)$	????
7. $\exists x\, p(x) \to \exists x\, q(x)$		????
M.O.T	????	

   (b) (2 pistettä) Määrittele parillisten luonnollisten lukujen joukko induktiivisesti, kun tunnetaan vain seuraajafunktio $s(n) = n + 1$ ja tiedetään, että luku 2 on parillinen luonnollinen luku.

KAAVOJA ON PAPERIN TOISELLA PUOLELLA.

Loogisia ekvivalensseja eli tautologioita

Negaatio	Disjunktio	Konjunktio	Implikaatio
$\neg\neg p = p$	$p \vee \mathbf{t} = \mathbf{t}$	$p \wedge \mathbf{t} = p$	$p \to \mathbf{t} = \mathbf{t}$
	$p \vee \mathbf{e} = p$	$p \wedge \mathbf{e} = \mathbf{e}$	$p \to \mathbf{e} = \neg p$
	$p \vee p = p$	$p \wedge p = p$	$\mathbf{t} \to p = p$
	$p \vee \neg p = \mathbf{t}$	$p \wedge \neg p = \mathbf{e}$	$\mathbf{e} \to p = \mathbf{t}$
			$p \to p = \mathbf{t}$
			$p \to q = \neg p \vee q$
			$p \to q = \neg q \to \neg p$
			$\neg(p \to q) = p \wedge \neg q$

Vaihdantalait	Liitäntälait	Osittelulait
$p \wedge q = q \wedge p$	$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee q = q \vee p$	$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

De Morganin lait	Absorptio
$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$	$p \wedge (p \vee q) = p$
$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$	$p \vee (p \wedge q) = p$
	$p \wedge (\neg p \vee q) = p \wedge q$
	$p \vee (\neg p \wedge q) = p \vee q$

Inferenssisääntöjä

MP $\dfrac{A,\ A \to B}{\therefore B}$	**MT** $\dfrac{A \to B,\ \neg B}{\therefore \neg A}$	**Conj** $\dfrac{A,\ B}{\therefore A \wedge B}$	**Simp** $\dfrac{A \wedge B}{\therefore A}$
Add $\dfrac{A}{\therefore A \vee B}$	**DS** $\dfrac{A \vee B,\ \neg B}{\therefore A}$	**HS** $\dfrac{A \to B,\ B \to C}{\therefore A \to C}$	

muista rajoitukset

UI $\dfrac{\forall x\, W(x)}{\therefore W(t)}$	**UG** $\dfrac{W(t)}{\therefore \forall x\, W(x)}$	**EG** $\dfrac{W(t)}{\therefore \exists x\, W(x)}$	**EI** $\dfrac{\exists x\, W(x)}{\therefore W(t)}$

Ekvivalensseja

$\neg\forall x\, W(x) = \exists x\, \neg W(x)$	$\neg\exists x\, W(x) = \forall x\, \neg W(x)$
$\exists x\, (A(x) \vee B(x)) = \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$	$\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) = \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$
$\exists x\, (A(x) \to B(x)) = \forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)$	$\forall x\, \forall y\, W(x, y) = \forall y\, \forall x\, W(x, y)$
$\exists x\, \exists y\, W(x, y) = \exists y\, \exists x\, W(x, y)$	

$\forall x\, (C \vee A(x)) = C \vee \forall x\, A(x)$	$\forall x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \forall x\, A(x)$
$\exists x\, (C \vee A(x)) = C \vee \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (C \to A(x)) = C \to \forall x\, A(x)$	$\exists x\, (C \to A(x)) = C \to \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (A(x) \to C) = \exists x\, A(x) \to C$	$\exists x\, (A(x) \to C) = \forall x\, A(x) \to C$

Implikaatioita

$\forall x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$
$\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \vee B(x))$	$\forall x\, (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \to \forall x\, B(x)$
$\exists y\, \forall x\, W(x, y) \Rightarrow \forall x\, \exists y\, W(x, y)$	