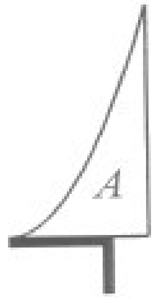
MAT-10351 Insinöörimatematiikka A5

Tentti 17.5.2008

- **Ei laskimia, ei omaa kirjallista materiaalia.**
- **Kääntöpuolella kaavakokoelma**
- **Vastaa jokainen tehtävä eri paperille.**

---

1. Tasomainen levy A on käyrien $y = x^2$, $y = 0$ ja $x = 2$ rajoittama alue. Levyn pintatiheys $\rho(x, y) = y$. Jos levy sijaitsee pinnalla, jota kuvaa x-akselin väli $x \in [\,0\,,\,\frac{3}{2}\,]$, niin putoaako levy pinnalta? Tutki asiaa painopisteen avulla.



2. Joukko $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y \geq 0\}$. Suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\iint_B e^{-x^2-y^2}\,dydx$$

ja jos suppenee, niin mikä on integraalin arvo?
Vihje: Polaarimuunnos ja siihen sopiva joukkojono.

3. **a)** Mikä on differentiaaliyhtälön $y' = x\sqrt{y}$ yleinen ratkaisu.

b) Määritä differentiaaliyhtälön $2y' + 8xy - x = 0$ yleinen ratkaisu ja alkuehdon $y(0) = 1$ toteuttava ratkaisu.

4. Määrää differentiaaliyhtälöryhmän yleinen ratkaisu.

$$\begin{cases} x_1' &= x_2 + 1 \\ x_2' &= x_1 + t \end{cases}$$

MAT-1035X Insinöörimatematiikka 5 / vihjeitä

1. $$\iint_{R_{xy}} f(x,y)\,dxdy = \iint_{R_{uv}} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$

2. $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$$

3. $$m = \iint_R \rho(x,y)\,da, \quad J = \iint_R d(x,y)^2 \rho(x,y)\,da$$
$$x_0 = \frac{1}{m}\iint_R x\,\rho(x,y)\,da, \quad y_0 = \frac{1}{m}\iint_R y\,\rho(x,y)\,da$$

4. $$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \rho^2 \sin\phi$$

5. $$\frac{dy}{dx} + a(x)y = f(x); \quad y = e^{-A(x)}\left(\int f(x)e^{A(x)}dx + C\right), \quad A'(x) = a(x)$$

6. $$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$
$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

7. $$a\cos\omega t + b\sin\omega t = A\sin(\omega t + \phi)$$
$$A = \sqrt{a^2+b^2} \text{ ja } \cos\phi = \frac{b}{A}, \ \sin\phi = \frac{a}{A} \text{ eli } \phi = \arctan\frac{a}{b} \ (\pm\pi)$$

8. $$f(x) = c\,e^{\alpha x}$$
$y(x) = K e^{\alpha x}$ jos α ei ole kar. yhtälön juuri

$y(x) = K x e^{\alpha x}$ jos α on kar. yhtälön 1–kertainen juuri

$y(x) = K x^2 e^{\alpha x}$ jos α on kar. yhtälön 2–kertainen juuri

9. $$y'' + \omega^2 y = p\cos\omega x + q\sin\omega x$$
$$y(x) = A x\cos\omega x + B x \sin\omega x, \quad A = -\frac{q}{2\omega} \quad \text{ja} \quad B = \frac{p}{2\omega}$$

10. $$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

(i) yksinkertainen reaalijuuri λ_1; ratkaisu $e^{\lambda_1 x}$

(ii) yksinkertainen imaginaarijuuripari $\alpha \pm j\beta$; ratkaisut

$e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $e^{\alpha x}\sin\beta x$

(iii) k–kertainen reaalijuuri λ_1, ratkaisut

$e^{\lambda_1 x}, \ x e^{\lambda_1 x}, \ x^2 e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda_1 x}$

(iv) k–kertainen imaginaarijuuripari $\alpha \pm j\beta$, ratkaisut

$e^{\alpha x}\cos\beta x, \ x e^{\alpha x}\cos\beta x, \ \ldots, \ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$

$e^{\alpha x}\sin\beta x, \ x e^{\alpha x}\sin\beta x, \ \ldots, \ x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

11. $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ ...... $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c} + \mathbf{x}_p(t)$

$$X(t) = \left[\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}\right]$$

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta, \ \mathbf{w}_{1,2} = \mathbf{u} \pm j\mathbf{v}$ ...... $\mathrm{Re}\{\mathbf{w}_1 e^{\lambda_1 t}\}, \ \mathrm{Im}\{\mathbf{w}_1 e^{\lambda_1 t}\}$

12. $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + e^{\lambda t}\mathbf{k}$ ..... $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ ..... $(A - \lambda I)\mathbf{v} = -\mathbf{k}$

13. Integrointikaavoja:

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = F(g(t)); \quad F' = f, \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|$$

$$\int u(x)\underbrace{v'(x)dx}_{dv(x)} = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$