OHJ-2150 Algoritmien analyysi Kevät 2008, I tentti

Vastaa kysymyksiin konseptille.

1. hessa on algoritmi, jossa osa koodista on abstrahoitu pois

```
    NUMBERING(V, E)
1   W := V
2   F := E
3   t := 1
4   while W ≠ ∅ do
5      z := t
6      for v ∈ W do
7         if ∀u ∈ W : (u, v) ∉ F then
8            W.Remove(v); v.d := t;
9            ∀w ∈ W : (v, w) ∈ F ⇒ F.Remove((v, w))
10           t := t + 1; break for
11        endif
12     endfor
13     if z = t then return True
14  endwhile
15  return False
```

Vastaa seuraaviin kysymyksiin.

(a) (6 pistettä) Analysoi ohjelman suoritusaika, ota huomioon esitystavan vaikutus ja joukkoabstraktioiden F ja W toteutustavat. Ota huomioon, että rivit 7 ja 9 täytyy toteuttaa jotenkin.

(b) (6 pistettä) Osoita, että ohjelma palauttaa *True* jos ja vain jos graafissa (V, E) on suunnattu silmukka.

(c) (6 pistettä) Osoita, että jos ohjelma palauttaa *False*, niin lopussa graafissa (V, E) jokaiselle kaarelle (u, v) pätee, että $u.d < v.d$.

2. Olkoon $\mathcal{H}$ universaali kokoelma hajautusfunktioita, jotka kuvaavat (äärellisen) joukon U joukolle $\{0, 1, \ldots, m-1\}$.

(a) (3 pistettä) Olkoon kaksi alkiota $a, b \in U$ valittu täysin satunnaisesti, samoin hajautusfunktio $h \in \mathcal{H}$. Mikä on todennäköisyys, että $h(a) = h(b)$?

(b) (2 pistettä) Entä jos tiedämme, että $a \neq b$?

(c) (3 pistettä) Olkoon $m = 2$ ja $U = \{0, 1, 2, 3\}$. Anna esimerkki joukosta $\mathcal{H}$. Funktiot voit antaa taulukkoina muotoa $[h(0), h(1), h(2), h(3)]$.

3. Ilmoita vastaukset (sekä ylä- että alaraja, tai Θ) seuraaviin *mahdollisimman tarkasti*. Kuhunkin kohtaan on olemassa tasan yksi oikea vastaus.

(a) (2 pistettä) $\Theta(n^2) + O(n \log n)$

(b) (2 pistettä) $O(\log(n!)) + \Theta(n(\log n)^2)$

(c) (2 pistettä) $\sum_{i=1}^{n} \Theta(\log i)$

(d) (2 pistettä) $\sum_{1=1}^{\log n} \Theta(i)$

(e) (2 pistettä) $O(n) + O(n^2) + \Theta(n(\log n)^5)$

(f) (2 pistettä) (Oleta, että $\epsilon > 0$) $\Theta(n^{1+\epsilon}) + O(n \log(n))$

(g) (2 pistettä) $(n^{1+\sin n}) \cdot \Theta(n \log n)$

(h) (2 pistettä) $\log^*(n!) + \Theta(\log n)$

4. Ohessa on ohjelmakoodia. Oletetaan, että aloitamme suunnatun graafin (V, E) jostakin solmusta kutsumalla DFS-1(s). Alussa kaikki solmut ovat valkoisia ja $t = 0$

```
   DFS-1(u)
1  t:=t + 1
2  u.d:=t
3  u.COLOR:=GRAY
4  for v ∈ u.ADJ do
5     if v.COLOR = WHITE then
6        DFS-1(v)
7     endif
8  endfor
9  u.COLOR:=BLACK
```

(a) (3 pistettä) Lisää ohjelmaan tarvittavat rivit siten, että ohjelma lopettaa (komento EXIT(*hep!*)) havaitessaan, että solmusta s saavutettavassa osassa graafia on silmukka. (Jos rivisi tulee esim. rivien 8 ja 9 väliin, käytä merkintää 8.1 jne.)

(b) (3 pistettä) Lisää (alkuperäiseen) ohjelmaan rivejä siten, että se etsii s:stä saavutettavia vahvasti kytkettyjä komponentteja. Käytä pinoa S, tulosta joukko solmuja ja käytä erottimena komentoa KOMPONENTTI VALMIS. Voit olettaa, että S on aluksi tyhjä. (Vihje: Tarjan)

(c) (3 pistettä) Anna esimerkki, jossa kumpikaan kohtien (a) ja (b) ratkaisuista ei toimi oikein, jos yksi solmu on alussa musta tai harmaa. Piirrä kuva graafista, merkitse siihen s ja ko. musta tai harmaa solmu.

(d) (3 pistettä) Oletetaan, että kohdassa (b) täytyy pelkän tulostamisen sijaan tallettaa vahvasti kytketyt komponenti sopivaan tietorakenteeseen. Tietorakenteessa pitäisi jokaisella joukolla olla jokin tunniste siten, että kahdesta solmusta voidaan aina helposti tutkia, kuuluvatko ne samaan joukkoon. Lisää rivit ja kerro, miten algoritmin ajankäyttö muuttuu. (Vihje: Erilliset joukot)

5. Oletetaan, että käytössä on kaksi pinoa S_1 ja S_2.

(a) (2 pistettä) Näytä, miten jonon operaatiot ENQUEUE ja DEQUEUE toteutetaan kahden pinon avulla.

(b) (2 pistettä) Mitkä ovat operaatioiden pahimman tapauksen suoritusajat?

(c) (2 pistettä) Entä tasatut suoritusajat?

6. (6 pistettä) Mitä voivat olla rekursioyhtälön $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$ asymptoottiset ratkaisut, kun $f(n)$ on polynomi?