

**MAT-31080**

**Kompleksimuuttujan funktiot**

**Tentti 12.5.2008**

**Ei muistiinpanoja, laskimia, taulukoita.**

1. Määrittele trigonometrinen funktio  $\sin(z)$  ja hyperbolinen funktio  $\sinh(z)$  ja osoita, että

$$\sin(iz) = i\sinh(z).$$

2. a) Mikä on algebran peruslause?  
b) Mitä sanoo Rouché'n lause?  
c) Todista Rouché'n lauseen avulla algebran peruslause.

3. Laske integraali

$$\int_S \frac{1}{2z(1+z^2)} dz,$$

kun  $S$  on positiivisesti suunnistettu origokeskinen 2-säteinen ympyrän kehä.

4. Muodosta funktion  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 4}$  Laurentin sarja, joka suppenee pisteiden

- a)  $z = 2$   
b)  $z = -2$

ympäristöissä. Mitkä ovat sarjojen suppenemissäteet.

5. Määritellään funktio

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 1 \\ -1 & 1 < t \leq 3 \\ 0 & 3 < t < \infty \end{cases}$$

Onko funktio  $f(t)$  Laplace-muuntuva? Mikä on sen Laplace-muunnos?