MAT-20450 Fourier'n menetelmät Tentti 19.03.2008

- **Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.**
- **Jokaiseen paperiin nimi ja opiskelijanumero.**

1. Laske tai päättele suoraan (parillisuuden tai parittomuuden nojalla) funktion $h(t) = |\cos(t)|$ kompleksisen Fourier-sarjan kaikki kertoimet

$$c_n = \frac{1}{T}\left(\int_d^{d+T} h(t)\cos(n\omega t)\,dt - \mathrm{j} \int_d^{d+T} h(t)\sin(n\omega t)\,dt \right)$$

ja muodosta lopuksi funktion kompleksinen Fourier-sarja

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{j}n\omega t}\,.$$

Vihje 1: Hahmottele funktion kuvaajaa ja päättele sen avulla T sekä ω.

Vihje 2: $2\cos(t)\cos(mt) = \cos(m-1)t + \cos(m+1)t$.

2. Funktiolle $f(t) = |\sin(t)|$ tunnetaan kompleksinen Fourier-sarja

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{j}n\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-4n^2)} e^{\mathrm{j}2nt}$$

a) Muodosta tästä funktion $f(t)$ Fourier-sarjan trigonometrinen versio

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t))$$

missä

$$\tfrac{1}{2}a_0 = c_0, \quad a_n = c_n + c_n^*, \quad b_n = \mathrm{j}(c_n - c_n^*) \qquad (n \geq 1)$$

b) Olisiko funktion $f(t)$ Fourier-sarjasta termeittäin derivoimalla saatava sarja (jos se muodostettaisiin) derivaatan $f'(t)$ Fourier-sarja? Perustele.

Käännä!

3. Tunnetaan Fourier-muunnos $K(\mathrm{j}\omega) = AT\mathrm{sinc}^2(\omega T/2)$ kolmiopulssille

$$k(t) = \begin{cases} (A/T)t + A & (-T \le t \le 0) \\ (-A/T)t + A & (0 \le t \le T) \\ 0 & (\text{muulloin}) \end{cases}$$

a) Johda Fourier-muunnos kolmiopulssille

$$f(t) = t\,[H(t) - H(t - 1/2)] + (1 - t)\,[H(1 - 1/2) - H(t - 1)]$$

[4 pistettä]

b) Totea **a**-kohdan vastauksen itseisarvo ja <u>perustele</u> se. [2 pistettä]

Apuna: Jos $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\mathrm{j}\omega)$, niin $\mathcal{F}\{f(t-\tau)\} = e^{-\mathrm{j}\omega\tau}F(\mathrm{j}\omega)$ ja $\mathcal{F}\{e^{\mathrm{j}at}f(t)\} = F(\mathrm{j}(\omega-a))$ ja $\mathcal{F}\{F(\mathrm{j}t)\} = 2\pi f(-\omega)$.

4 a) Tehtävän **3** kolmiopulssin $k(t)$ esitys Fourier-integraalina

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} e^{\mathrm{j}\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) e^{-\mathrm{j}\omega\tau}\, d\tau \right] d\omega$$

sievenee, kun sisempi integraali korvataan valmiiksi lasketulla pulssin Fourier-muunnoksella. Tee tämä sievennys!

b) Edellä saadun integraalin <u>likiarvo</u>

$$k(t) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \ldots\ d\omega$$

sievenee vielä lisää. Tee tämä sievennys mahdollisimman pitkälle!

(*Vihje:* Parillisuus ja parittomuus ja origokeskinen väli.)