[illegible]

**MAT-10341 Insinöörimatematiikka A4. tentti 29.3.2008. (Pirttimäki).**

Ei laskinta , kaavat kääntöpuolella.

1. (i) Laske derivaattavektori käyrälle
$\mathbf{r}(t)=(\ln(1+t),\sin(t^2),te^{\cos t})^t$, kun t=0.

   (ii) Osoita, että funktiolla $g(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ ei ole raja-arvoa origossa.

2. (i) Olkoon $g(x,y)=x^2y+xz+ze^y$,
$\mathbf{f}(s,t)=\left[\dfrac{s}{t},t\ln(s^2),s-t\right]^t$ laske yhdistetyn funktion
$(g\circ\mathbf{f})(s,t)$ derivaatta pisteessä (2,1) ketjusäännöllä.

   (ii) Etsi funktion
$f(x,y)=\ln(x^2+yx+y^2+3)$ Taylorin 2. asteen polynomi pisteessä (1,1).

3. Laske funktion

$$f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2-2y^2+3z^2}}$$

suunnattu derivaatta pisteestä $(1,-1,-1)$ suuntaan $\mathbf{v}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

4. Määrää f:n kriittiset pisteet ja niiden laatu, kun

$$f(x,y)=-\frac{1}{2}x^{-2}-\frac{1}{2}y^{-2}-xy+3$$

# MAT-10341 Insinöörimatematiikka A4
# Kaavakokoelma

(1) d'Alembert: $\lim \left| \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \right| = c$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k: \quad R = \lim \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$

(3) $P_n(x) = f(a) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

(4) $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

(5) $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, $\xi$ on $a$:n ja $x$:n välissä.

(6) **Maclaurin sarjoja**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} + \cdots, \quad (|\, x \,| \le 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + \cdots, \quad (-1 < x \le 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \cdots \quad (|\, x \,| < 1,\ \alpha \in \mathbb{R})$$

(7) $s = \displaystyle\int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$

(8) $\dfrac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\| > 0$

(9) $\kappa(s) = \|\mathbf{r}''(s)\|$

(10) $\kappa(t) = \dfrac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$

(11) $\mathbf{f}\,'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$

(12) $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})'(\mathbf{x}) = \mathbf{g}\,'(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\mathbf{f}\,'(\mathbf{x})$

(13) $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})\mathbf{u}$

(14) $\nabla f(\mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$

(15) $f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \dfrac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T H(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$

(16) Ääriarvokohdassa $\Delta = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0, \ldots$

(17) $\begin{cases} g(x,y) = 0 \\ \nabla f + \lambda \nabla g = \mathbf{0} \end{cases}$

(18) $\begin{cases} g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \\ \nabla f + \lambda \nabla g + \mu \nabla h = \mathbf{0} \end{cases}$

JOONAS. LAINE